

Hopf-ホモクリニック分岐に関する研究

富澤 俊太郎

平成 31 年 2 月 7 日

概 要

通有的な Hopf 点を持つ 3 次元以上の C^r ($r \geq 5$) 微分同相写像を考える。この Hopf 点に伴うホモクリニック軌道が存在するとき、この微分同相写像は **Hopf**-ホモクリニックサイクルを持つという。この論文では、Hopf-ホモクリニックサイクルを持つ任意の C^r 微分同相写像は、ヘテロ次元サイクルを持つ微分同相写像で C^r 近似できることを示す。さらに、ホモクリニック接触を持つ 3 次元の C^r 微分同相写像のあるモデルが、通有的な Hopf 点を持つ微分同相写像で C^r 近似できることを示す。

目 次

1	導 入	2
2	準 備	5
2.1	力学系の用語	6
2.2	力学系の定理	10
3	Hopf-ホモクリニック分岐の研究	16
3.1	Hopf 点と標準形	16
3.2	Hopf 分岐による不変円の生成	17
3.3	不変円の回転数	18
3.4	定理 1.1 の証明のための一般性を失わない仮定	20
3.5	不変円上の双曲型周期軌道の稠密な増殖	21
3.6	不安定円筒と安定多様体との交差	23
3.7	局所的にロバストなホモクリニック軌道	27
3.8	定理 1.1 の証明	30
4	ホモクリニック接触から Hopf 分岐の構成	31
4.1	モデルに要請する仮定	31
4.2	Hopf 点となる周期点の存在	32
4.3	Lyapunov 値の計算	39

1 導入

この節では、本研究の背景と動機、得られた結果などを述べる。力学系の研究で使われる基本的な用語の定義はこの節では省略する。これらは第 2 節で詳しく定義されているので、必要に応じてそちらを参照してもらいたい。

—本研究の背景と動機—

Smale はロバストに無限個の周期点を持つ馬蹄などのモデルを統合し、双曲型という微分同相写像のクラス（公理 A クラス）を 1960 年代に導入した（詳しくは [BDV] を見よ）。1980 年代後半には、双曲型力学系の研究はほぼ完了し、それらは位相的視点、エルゴード的視点の双方からよく理解されている。双曲型というクラスは、微分同相写像全体で稠密になると意図されて導入されたのにも関わらず、それは間違いであることが直ぐに分かった。つまり、ロバストに非双曲型なクラスが存在し、しかもこのような現象は豊富に起こっていることが知られている。ロバストの定義は第 2 節の定義 2.11 を見よ。ロバストに非双曲型になるメカニズムの代表格として君臨するのが、「ホモクリニック接触」と「ヘテロ次元サイクル」である。ここで、微分同相写像がホモクリニック接触を持つとは、ある双曲型周期点 p が存在して、 p の安定多様体と不安定多様体が接点を持つことであり、ヘテロ次元サイクルを持つとは、2 つのある双曲型周期点 P, Q が存在して、(i) P の安定多様体と Q の安定多様体の次元が異なり、(ii) P の軌道の不安定多様体と Q の軌道の安定多様体が交わり、(iii) Q の軌道の不安定多様体と P の軌道の安定多様体が交わることである。図 1.1 を見よ。

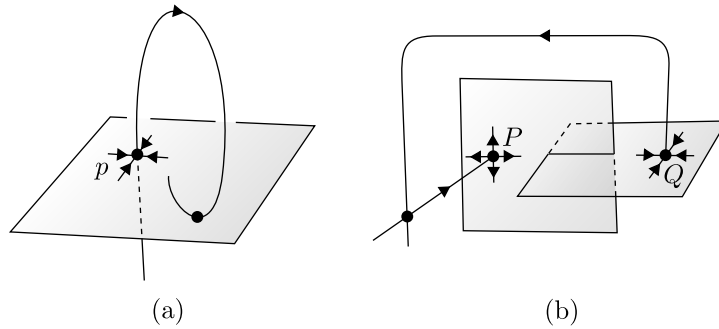


図 1.1: (a) ホモクリニック接触と, (b) ヘテロ次元サイクル

我々の研究のモチベーションは、「双曲型力学系全体の境界ではどのような、ロバストな非双曲型の現象が起きているのか？」を明らかにし、そのメカニズムを調べることである。

—本研究で得られた結果—

双曲型力学系全体の境界にある微分同相写像の例として、素直に考えられるのは、非双曲型周期点を持つ微分同相写像である。2次元以上の典型的な非双曲型周期点として、**Hopf** 点が良く知られている。ここで、周期点 p が Hopf 点であるとは、(i) 点 p におけるヤコビ行列が、任意の $k = 1, 2, 3, 4, 5$ に対して、1 の k 乗根でない大きさ 1 の 2 つの共役な複素固有値をもち、かつ残りの固有値の大きさが 1 でなく、(ii) 点 p におけるテイラー展開の高次の係数から p が局所中心多様体上で吸引力的か反発的かが決まるようなものである。詳しくは定義 3.1 を見よ。 d 次元の微分同相写像が Hopf 点を持つとき、前方軌道が Hopf 点に相対的に近づく点全体ははめ込まれた $d_s (\geq 0)$ 次元部分多様体であり、後方軌道が Hopf 点に相対的に近づく点全体もはめ込まれた $d_u = d - d_s$ 部分多様体である。詳しくは第 3.4 節を見よ。従って、 $d \geq 3$ のとき、この 2 つの不変多様体が変わる点、即ち、Hopf 点に伴伴するホモクリニック点が存在するということはしばしば起きうる現象である。微分同相写像が、ホモクリニック点を伴伴する Hopf 点 p を持つとき、その微分同相写像は **Hopf-ホモクリニックサイクル**を持つということにする。図 1.2 を見よ。

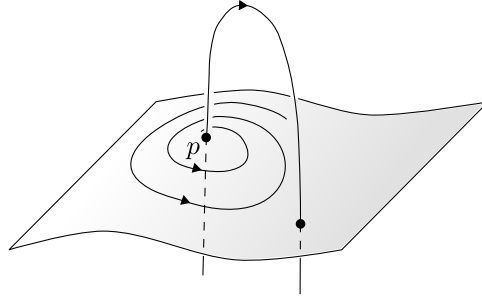


図 1.2: Hopf-ホモクリニックサイクル

Marín [M] は、Hopf-ホモクリニックサイクルを持つという、双曲型力学系の境界における“自然”な現象から、ホモクリニック接触を持つ微分同相写像を発見した。この結果を受け、我々は、もう一つの非双曲型な現象、ヘテロ次元サイクルに注目し、次の結果を得た。以下において、ヘテロ次元サイクルの余指数とは、サイクルをなす 2 つの双曲型周期点の安定多様体の次元の差である。

定理 1.1. f を $m (\geq 3)$ 次元多様体 M 上の C^r ($r \geq 5$) 微分同相写像であって、Hopf-ホモクリニックサイクルを持つものとする。このとき、 $\text{Diff}^r(M)$ における f の任意の C^r 近傍 \mathcal{N} に対して、ある $g \in \mathcal{N}$ が存在して、 g は 2 つの双曲型周期軌道に関する余指数が 1 のヘテロ次元サイクルを持つ。

注意 1.2. $r \geq 5$ という条件は Ruell, Takens [RT] によって与えられた通有的な Hopf 分岐を起こすための十分条件である。詳しくは定義 3.1 と第 3.2 節

を見よ.

注意 1.3. 定理 1.1 と Bonatti, Díaz [BD] の結果より, Hopf-ホモクリニックサイクルを持つ微分同相写像の C^1 でいくらかでも近いところに, ロバストなヘテロ次元サイクルを持つ微分同相写像が存在することは直ぐに分かるが, C^r では未解決であり, 今後の課題である.

前述の通り, Hopf-ホモクリニックサイクルを持つという現象は, 双曲型力学系の境界で豊富に起こっているはずの現象である. そこで我々は, ホモクリニック接触という現象から, Hopf-ホモクリニックサイクルという現象が得られるのではないかと考えた. こうして, あるホモクリニック接触から Hopf 分岐を発見することまではできたが, この Hopf 点に同伴するホモクリニック点が存在することまでは言えなかった. 以下でそのことを説明する.

φ を 3 次元の C^r 微分同相写像であって, 固有値 λ_i ($i = 1, 2, 3$) (但し, $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2 < \lambda_3$) が対応する双曲型不動点 p を持ち, p に同伴するホモクリニック接触 q が存在するものとする. ここで, 閉条件ではあるが, $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ を仮定する. さらに, 次の (i)–(iii) (この 3 つの条件の詳しい説明は第 4.1 節を見よ) をみたし, $\varphi_0 = \varphi$ となる 2-パラメータ $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ の C^r 微分同相写像の族 $\{\varphi_\mu\}_\mu$ が存在すると仮定する:

- (i) 不動点 p の延長 p_μ における固有値が μ_1 だけで適切に制御される;
- (ii) p_μ を原点とする C^5 線形化座標 (x, y, z) (即ち, この座標を用いて $\varphi_\mu(x, y, z) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y, \lambda_3 z)$ と表示される) と, μ_2 のみで制御されるある大域写像 φ_μ^N が存在して, φ_μ^N は零でない定数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ と定数 a を使って

$$\varphi_\mu^N : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ax + \beta y \\ \alpha x + \gamma y^2 \\ \delta z \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

という簡単な形にかけると. 図 1.3 を見よ. $\mu = 0$ のときホモクリニック

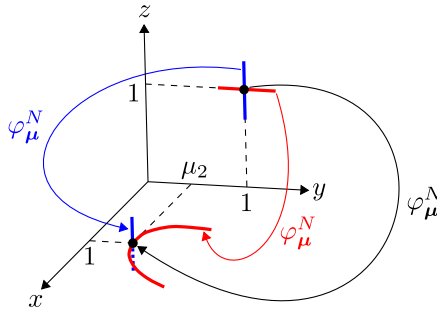


図 1.3: 大域写像 φ_μ^N

接触 $(1, 0, 0)$ を持つが, この軌道は元のホモクリニック接触 q を含む;

(iii) (ii) で与えられる定数について, $a \neq 0, \alpha\beta < 0$ を仮定する ;

このとき, 我々は次を得た :

定理 1.4. φ を上の仮定をみたす, ホモクリニック接触を持つ 3 次元の C^r ($r \geq 5$) 微分同相写像とする. このとき, φ は Hopf 点 p を持つ微分同相写像で C^r 近似される. 特に, $a > 0$ ならば p は局所中心多様体上で吸引的で, $a < 0$ ならば反発的である.

注意 1.5. φ に対して閉条件 $\lambda_1\lambda_2 = 1$ を仮定したが, これは本質的な条件である. 即ち, この条件を外した場合, 我々の方法で直接的に定理 1.4 を証明することはできない. その理由は注意 4.5 を見よ.

注意 1.6. φ に幾何的で適切な開条件と, 固有値に通有的な仮定を適切に置けば, (ii) の大域写像 φ_μ^N が単純な形 (1.1) をしているという保証はないが, (i)–(iii) をみたす族 $\{\varphi_\mu\}_\mu$ が存在するとは言える. 大域写像 φ_μ^N の形 (1.1) の仮定を緩めたとき, 定理 1.4 の証明が同様の方法でどこまで追えるかは今後の課題である.

注意 1.7. 定理の Hopf 点 p に同伴するホモクリニック点が存在するか? という問題は今後の課題である. もしこれが肯定的に解決すれば, 定理 1.1 より, ある種のホモクリニック接触からヘテロ次元サイクルを構成できたことになる.

—論文の構成—

この論文は次のように構成されている :

- 第 2 節では, この論文で用いられる用語や定理などを述べる. この節は必要であれば後で読み返す程度で良い.
- 第 3 節では, 初めに Hopf 分岐に関する復習を行った後, Martín [M] のアイデアに基づいて定理 1.1 を証明する.
- 第 4 節では, モデルに要請する仮定を述べた後, 定理 1.4 を証明する.

読み易さのため, 全ての節の初めに必ずその節で行うことを説明しているということを強調したい.

2 準備

この節では, 離散時間力学系の研究でしばしば用いられる用語や定理などを述べる. この論文を読むために最低限必要な知識の紹介である.

この節を書くにあたり、定義や定理の幾何的なイメージや、その動機などについてなるべく触れるように心掛け、天下りの的に定義や定理を述べたりすることはできるだけ避けたつもりである。これらが読み易さに繋がってもらえれば幸いである。

2.1 力学系の用語

この節では、離散時間力学系の研究でよく用いられる用語を定義していく。前後の定義などにはあまり関係性はなく、独立しているので、ある程度部分的に読めるようになっている。

時間と共に変化するシステムを大雑把に力学系と呼ぶが、数学をやるうえでそのような雑な定義は好ましくないだろう。そこで、離散時間において力学系は、数学的には次のように定義する：

定義 2.1 (力学系). 可微分多様体 M 上の力学系とは、定義域と終域が同じ写像 $f: M \rightarrow M$ のことである。

注意 2.2. 一般的には M は可微分多様体である必要はなく、力学系をどう考察するかに応じて、集合 M に様々な構造を入れる。一般化して話をしても良いが、この論文を読むだけであれば、 M は常に可微分多様体であると思って良いので、上記のような定義にした。

注意 2.3. 写像 $f: M \rightarrow M$ は次のような意味で時間と共に変化するシステムと思えることに注意せよ。 M は観測量（例えば位置、速度、温度、濃度、人口密度など）の集合と考えることができる。力学系 $f: M \rightarrow M$ は、各観測量 $p \in M$ の 1 秒後の変化 $f(p) \in M$ を返す自然界の法則として考えることができる。このとき、初期条件 $p \in M$ が与えられたとき、その n 秒後 ($n = 0, 1, \dots$) の変化は $f^n(p)$ で与えられることになる。ここで、 f^0 は恒等写像を表し、 f^n は f の n 回合成である：

$$f^n = f \circ f \circ \dots \circ f \quad (n \text{ 回})$$

こういった意味で、 f は時間と共に変化するシステムと思えるわけである。図 2.1 を見よ。

前述の注意の通り、力学系 $f: M \rightarrow M$ が与えられたとき、点 $p \in M$ は時間と共に変化する。その“軌跡”には次のような名称がついている：

定義 2.4 (軌道). $f: M \rightarrow M$ を力学系とする。点 $p \in M$ に対して、集合

$$\{f^n(p) \mid n = 0, 1, \dots\}$$

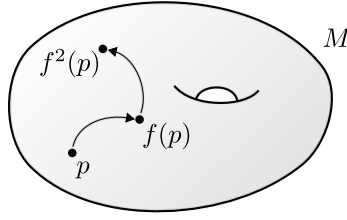


図 2.1: p の時間経過による変化

を p の前方軌道（または f -前方軌道）という． f が可逆であるとき，集合

$$\{f^{-n}(p) \mid n = 0, 1, \dots\}$$

を p の後方軌道（または f -後方軌道）といい，集合

$$\{f^n(p) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

を p の全軌道（または軌道， f -全軌道， f -軌道）という．ここで， $n = 1, 2, \dots$ ，に対して，

$$f^{-n} = f^{-1} \circ f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1} \quad (n \text{ 回})$$

と記号を定めている．

力学系に対して，時間経過で動かない点が現れることがある．これらは，数学的には次のように定義される：

定義 2.5 (不動点，周期点，周期)． $f : M \rightarrow M$ を力学系とする．点 $p \in M$ が f の不動点であるとは

$$f(p) = p$$

をみたすことである．また， $p \in M$ が f の周期点であるとは，ある $n \in \{1, 2, \dots\}$ が存在して

$$f^n(p) = p$$

をみたすことである．さらに， f の周期点 p に対して， $f^n(p) = p$ となる最小の自然数 n を，周期点 p の周期という．しばしば， p の周期を

$$\text{per}(p)$$

とかく．図 2.2 を見よ．

力学系の不動点や周期点は，その点近傍の点を“吸引”することがある．それらは次のように定義される：

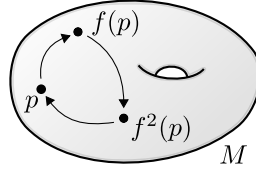


図 2.2: 周期 3 の周期点 p

定義 2.6 (吸引点, 反発点). $f: M \rightarrow M$ を力学系とする. 不動点 $p \in M$ が f の吸引点であるとは, p を含む M の開円板 D が存在して, 任意の $x \in D$ について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p$$

をみたすことである. また, 周期 n の周期点 $p \in M$ が f の吸引点であるとは, p が f^n の吸引点となることである. さらに, f が可逆であるとき, 周期 n の周期点 $p \in M$ が f の反発点であるとは, p が f^{-n} の吸引点となることである. 図 2.3 を見よ.

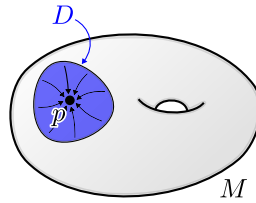


図 2.3: 吸引不動点 p の外形

上記のような時間経過で動かない点（不動点）に対して, 時間経過で動かない集合も存在し得る. それらは次のように定義される:

定義 2.7 (不変). $f: M \rightarrow M$ を力学系とする. 部分集合 $\Lambda \subset M$ が不変（または f -不変）であるとは,

$$f(\Lambda) = \Lambda$$

をみたすことである.

注意 2.8. 力学系 $f: M \rightarrow M$ の不動点 p に対して, 一点集合 $\{p\}$ は明らかに f -不変集合である. また, p が周期 n の周期点である場合, 軌道

$$\{p, f(p), \dots, f^{n-1}(p)\}$$

も明らかに f -不変集合である.

時間経過で動かない点に対して, 未来と過去の時間経過で周期点に相対的に近づく点も存在し得る. それらは次のように定義される:

定義 2.9 (ホモクリニック点, ヘテロクリニック点). $f : M \rightarrow M$ を可逆な力学系とし, $p, q \in M$ を f の異なる周期点とする. $r \in M \setminus \{p\}$ が p に同伴するホモクリニック点であるとは,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(r), f^n(p)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(r), f^{-n}(p)) = 0$$

をみたすことである. ここで, d は多様体 M の位相と同じ位相を誘導する勝手な距離である. また, $r \in M \setminus \{p, q\}$ が p と q に同伴するヘテロクリニック点であるとは,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(r), f^n(p)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(r), f^{-n}(q)) = 0 \quad \text{または} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(r), f^n(q)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(r), f^{-n}(p)) = 0 \end{aligned}$$

をみたすことである. 図 2.4 を見よ.

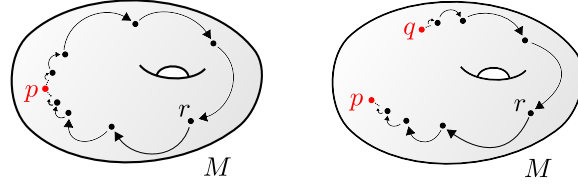


図 2.4: 不動点 p に同伴するホモクリニック点 r (左) と不動点 p, q に同伴するヘテロクリニック点 r (右)

次の概念は, この論文内ではあまり登場しないが, 一部で使われているので, 一応定義を述べておく.

定義 2.10 (非遊走点, 非遊走集合). $f : M \rightarrow M$ を力学系とする. 点 $p \in M$ が非遊走点であるとは, 任意の p の近傍 U に対して, ある $n \in \{1, 2, \dots\}$ が存在して,

$$f^n(U) \cap U \neq \emptyset$$

をみたすことである. また, 点 $p \in M$ が遊走点であるとは, p が非遊走点でないことである. f の非遊走点全体の集合のことを f の非遊走集合といい, 遊走点全体の集合のことを f の遊走集合という.

位相空間の元に関する条件であって, その条件が, 位相空間の点に対して“大体”成り立つということを数学的に定義する. また, その条件がロバストに成り立つということも正確に定める. これらはこの論文内でしばしば用いられる表現である.

定義 2.11 (残留集合, 通有的, ロバスト). X を位相空間とし, \mathcal{P} を X の元に関する条件とする. \tilde{X} が X の残留集合であるとは

$$\tilde{X} = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \quad (\text{各 } G_n \text{ は } X \text{ の開集合かつ } X \text{ で稠密})$$

とかけることである。また、条件 \mathcal{P} が X において通有的 (generic) であるとは、 X のある残留集合 \tilde{X} が存在して、 \tilde{X} の任意の元が \mathcal{P} をみたすことである。さらに、条件 \mathcal{P} が X においてロバストであるとは、 X のある開集合 G が存在して、 G の任意の元が \mathcal{P} をみたすことである。

2.2 力学系の定理

この節では、離散時間力学系の研究でしばしば用いられる定理を紹介していく。前の節では力学系 $f: M \rightarrow M$ は不可逆も許容していたが、この節では常に微分同相写像であることを仮定する。というのも、この論文での研究対象は微分同相写像であり、不可逆の場合まで一般化する必要性がないからである。またこの節では、接ベクトルに「長さ」が欲しいので、 M は常に Riemann 多様体であることを仮定する。但し、以下の全ての結果は、Riemann 計量の取り方に依らない。この節も前の節と同様に、ある程度部分的に読めるようになっている。

—安定多様体定理と中心多様体定理—

C^r ($r = 1, 2, \dots, \infty$) 微分同相写像 $f: M \rightarrow M$ に対して、時間経過によって動かない集合 Λ を不変集合と言ったことを思い出そう。実は、任意の $p \in \Lambda$ に対して、 Λ が“双曲型”と呼ばれる場合に、点 p に相対的に近づく点全体の集合は、単射的にはめ込まれた M の C^r 部分多様体になる (定理 2.15 (安定多様体定理))。その安定多様体定理を述べるために双曲型の定義を行っておく。

定義 2.12 (双曲型). $f: M \rightarrow M$ を微分同相写像とする。コンパクトな f -不変集合 Λ が双曲型であるとは、各 $p \in \Lambda$ に対して、ある直和分解 $T_p M = E_p^s \oplus E_p^u$ が存在して、次の条件をみたすことである。

- (i) 任意の $p \in \Lambda$ に対して、 E_p^s と E_p^u は微分 $Df(p)$ に関して不変である。即ち、

$$Df(p)(E_p^s) = E_{f(p)}^s \quad \text{かつ} \quad Df(p)(E_p^u) = E_{f(p)}^u$$

が成り立つ。

- (ii) ある $C > 0$ とある $0 < \lambda < 1$ が存在して、

$$\begin{aligned} \|Df^n(p)(v^s)\| &\leq C\lambda^n \|v^s\| \quad (p \in \Lambda, v^s \in E_p^s, n = 1, 2, \dots), \\ \|Df^{-n}(p)(v^u)\| &\leq C\lambda^n \|v^u\| \quad (p \in \Lambda, v^u \in E_p^u, n = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

をみたす。ここで、 $\|v\|$ は、 M の Riemann 計量から定まる接ベクトル v のノルムを表す。

注意 2.13. 双曲型の定義は天下りので、定義の意味が分かりにくいのも事実だろう（少なくとも著者はそう感じる）。そこで、双曲型不変集合の幾何的な解釈について述べる。 n_0 を十分大きくとり、 $\rho := C\lambda^{n_0} < 1$ となるようにすると、任意の $p \in \Lambda$ に対して、

$$\begin{aligned} \|Df^{n_0}(p)(v^s)\| &\leq \rho \|v^s\| \quad (v^s \in E_p^s), \\ \|Df^{-n_0}(p)(v^u)\| &\leq \rho \|v^u\| \quad (v^u \in E_p^u) \end{aligned}$$

となる。即ち、 $Df^{n_0}(p)|_{E_p^s}$ は縮小的であり、 $Df^{n_0}(p)|_{E_p^u}$ は反発的である。図 2.5 を見よ。このように双曲型不変集合とは、一様な縮小方向と拡大方向

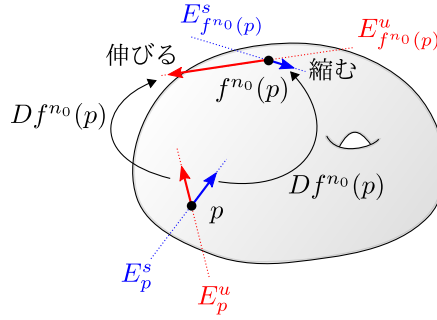


図 2.5: $Df^{n_0}(p)$ の様相

向が与えられた不変集合のこととして解釈できる。

注意 2.14. コンパクトな不変集合の例として、注意 2.8 では、力学系 $f : M \rightarrow M$ の不動点 p の一点集合 $\{p\}$ を挙げた。不動点 p が双曲型であるとは、 $\{p\}$ が双曲型集合であることとして定義されるが、この定義は、微分 $Df(p)$ が大きさ 1 の固有値を持たないことと同値になることが証明できる。実際、 E_p^s, E_p^u として、それぞれ大きさ 1 未満、大きさ 1 超過の固有値に対応する空間を選べば良い。同様に、 f の周期 n の周期点 p が双曲型であるとは、 p の軌道

$$\{p, f(p), \dots, f^{n-1}(p)\}$$

が双曲型集合であることとして定義されるが、この定義は、微分 $Df^n(p)$ が大きさ 1 の固有値を持たないことと同値になる。

定理 2.15 (安定多様体定理). $f : M \rightarrow M$ を C^r ($r = 1, 2, \dots, \infty$) 微分同相写像とし、 Λ を f の双曲型集合とする。各 $p \in \Lambda$ に対して、

$$\begin{aligned} W^s(p) &:= \left\{ x \in M \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(p), f^n(x)) = 0 \right\}, \\ W^u(p) &:= \left\{ x \in M \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(p), f^{-n}(x)) = 0 \right\} \end{aligned}$$

と定めると、 $W^s(p)$ と $W^u(p)$ は単射的にはめ込まれた M の C^r 部分多様体であり、それぞれの次元は $\dim E_p^s$ と $\dim E_p^u$ に等しく、それぞれは E_p^s と E_p^u に点 p で接する。即ち

$$T_p W^s(p) = E_p^s, \quad T_p W^u(p) = E_p^u$$

をみたす。ここで、 d は M の Riemann 計量から定まる距離を表す。図 2.6 を見よ。

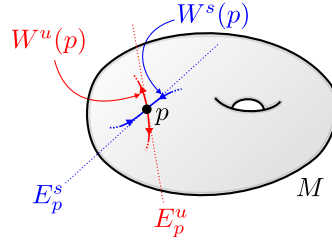


図 2.6: $W^s(p)$ と $W^u(p)$ の局所的な外形

注意 2.16. この定理には、実際には上記で述べた以外の主張も含まれているが、必要がないので割愛した。この定理の細部にわたる説明および証明は [R, Chapter VIII, Theorem 1.2] を参照せよ。

注意 2.17. $f : M \rightarrow M$ を微分同相写像とする。 $p \in M$ を周期 n の周期点であって、ヤコビ行列 $Df^n(p)$ の全ての固有値の大きさが 1 未満であるとする。注意 2.14 によれば、 p は双曲型であり、安定多様体定理と $\dim E_p^s = \dim M$ から、 $W^s(p)$ は p を含む開部分多様体であり、 p は f の吸引点となる（実は、安定多様体定理という大きな定理を使わずとも、平均値の定理による評価でこの結果を得ることができる）。同様に、周期 n の周期点 p であって、ヤコビ行列 $Df^n(p)$ の全ての固有値の大きさが 1 超過であれば、 p は f の反発点になる。このように、安定多様体定理は、双曲型周期点近傍での様子を解析するのに役立つ。

定義 2.18 (安定多様体, 不安定多様体). $f : M \rightarrow M$ を C^r ($r = 1, 2, \dots, \infty$) 微分同相写像, Λ を f の双曲型集合とし, $p \in \Lambda$ とする。安定多様体定理に現れる $W^s(p)$, $W^u(p)$ をそれぞれ p の f に関する安定多様体, 不安定多様体と呼ぶ。しばしば、どの力学系に関する不変多様体なのかを区別するため、 $W^s(p, f)$, $W^u(p, f)$ などともかく。 p が双曲型周期点で、 $O(p)$ が p の周期軌道であるとき、

$$W^s(O(p)) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} W^s(f^n(p)), \quad W^u(O(p)) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} W^u(f^n(p))$$

をそれぞれ p の軌道 $O(p)$ の f に関する安定多様体, 不安定多様体と呼ぶ。

安定多様体定理は、図 2.6 や注意 2.32 でみたように、双曲型周期点近傍での様子を解析するのに役立つわけだが、この「双曲型」という条件をとった場合は、一概にどうなっているかを断定することはできない。しかしながら、双曲型でない不動点の近傍で、“局所的に不変”な多様体（中心多様体）の存在は、一意的ではないが保証されている（定理 2.22（中心多様体定理））。この中心多様体定理を述べるために、あまり一般的に用いられていないが次の用語を定義する：

定義 2.19 (局所不変). $f : M \rightarrow M$ を微分同相写像とする。 M の部分多様体 W が、 $p \in W$ のまわりで局所不変（または局所 f -不変）であるとは、 p を含む M の開円板 D が存在して、

$$f(W) \cap D \subset W$$

をみたすことである。

注意 2.20. 図 2.7 で表されているような微分同相写像 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ について考える。ここで、原点 $\mathbf{0}$ は不動点である。例えば横軸は、 $\mathbf{0}$ を含む開円板 D

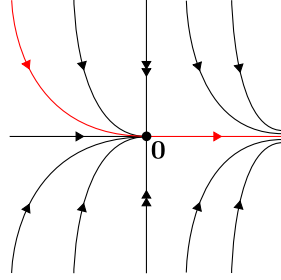


図 2.7: 力学系 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の様子

を小さくとれば $\mathbf{0}$ の周りで局所不変である。同様に、赤色の曲線も $\mathbf{0}$ の周りで局所不変である。局所不変な多様体とは、このような部分多様体を、数学的に捉えるために用意された単語である。

注意 2.21. M を m 次元多様体とし、 $f : M \rightarrow M$ を微分同相写像とする。 M の w ($< m$) 次元部分多様体 W が不動点 $p \in W$ のまわりで局所 f -不変であるとする。このとき、局所不変の定義で現れる開円板 D が存在するが、 D はいくらでも小さく取れ、さらに W は部分多様体なので、

$$W = \{x_{w+1} = x_{w+2} = \cdots = x_m = 0\} \quad \text{かつ} \quad p = \mathbf{0}$$

となる座標 (x_1, x_2, \dots, x_m) が D に入っていると思って良い。図 2.8 を見よ。また、 p は不動点なので、 p の近傍 $U \subset D$ であって、 $f(U) \subset D$ となるものが取れる。従って、局所不変の定義から W の座標 (x_1, x_2, \dots, x_w) を用いて、

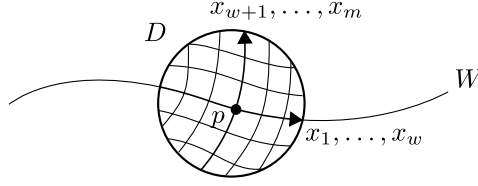


図 2.8: 座標 (x_1, x_2, \dots, x_m)

制限 $f|_W$ を局所的に

$$f|_W : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_w) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_w) \\ \vdots \\ f_w(x_1, x_2, \dots, x_w) \end{pmatrix} \quad (f_i(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, i = 1, \dots, w)$$

と表示できる.

定理 2.22 (中心多様体定理). $r = 1, 2, \dots$ (但し $r \neq \infty$), $f : M \rightarrow M$ を C^r 微分同相写像とし, $p \in M$ を不動点とする. 大きさ 1 未満の $Df^n(p)$ の固有値, 大きさ 1 の $Df(p)$ 固有値, 大きさ 1 超過の $Df(p)$ 固有値にそれぞれ対応する空間 E_p^s, E_p^c, E_p^u で, $T_p M$ を直和分解する:

$$T_p M = E_p^s \oplus E_p^c \oplus E_p^u.$$

このとき, 次が成り立つ:

- (i) 単射的にはめ込まれた, f -不変の M の C^r 部分多様体 $W^s(p), W^u(p)$ が存在して, それぞれの次元は $\dim E_p^s, \dim E_p^u$ に等しく, それぞれは点 p で E_p^s, E_p^u に点 p で接する.
- (ii) 埋め込まれた, p の周りで局所 f -不変の M の C^r 部分多様体 $W_{\text{loc}}^{cs}(p), W_{\text{loc}}^c(p), W_{\text{loc}}^{cu}(p)$ が存在して, それぞれの次元は $\dim E_p^s \oplus E_p^c, \dim E_p^c, \dim E_p^c \oplus E_p^u$ に等しく, それぞれは点 p で $E_p^s \oplus E_p^c, E_p^c, E_p^c \oplus E_p^u$ に点 p で接する.

注意 2.23. この定理には, 実際には上記で述べた以外の主張も含まれているが, 必要がないので割愛した. この定理の細部にわたる説明および証明は [R, Chapter V, Theorem 10.14, Theorem 10.15] を参照せよ.

注意 2.24. $W^s(p), W^u(p)$ をそれぞれ p の f に関する安定多様体, 不安定多様体とこの論文では呼ぶことにするが, 他の論文や本によっては, 定義が異なる場合があるので注意せよ. $W_{\text{loc}}^{cs}(p), W_{\text{loc}}^c(p), W_{\text{loc}}^{cu}(p)$ をそれぞれ p の f に関する局所中心-安定多様体, 局所中心多様体, 局所中心-不安定多様体と呼ぶ.

注意 2.25. p が周期 n の周期点である場合は, 中心多様体定理において f を f^n に置き換えることで, 同様の結果が成り立つ.

—Denjoy の定理—

微分同相写像 $f: M \rightarrow M$ について, M が一次元, 特に円周 \mathbb{S}^1 である場合に成り立つ, 強力な Denjoy の定理について述べる. ここで, 円周は

$$\mathbb{S}^1 := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = \{x + 2\pi\mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{R}\} \quad (x + 2\pi\mathbb{Z} = \{x + 2\pi z \mid z \in \mathbb{Z}\})$$

で定義する.

まずはそのために, 円周上の微分同相写像 $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ に対して, 移動の平均量を表す, 回転数を定義する. 次の定義において, f の持ち上げとは, 標準的な射影を $\text{pr}: \mathbb{R} \ni x \mapsto x + 2\pi\mathbb{Z} \in \mathbb{S}^1$ とおくと,

$$\text{pr} \circ F = f \circ \text{pr}$$

をみたす微分同相写像 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ のことであり, f が向きを保つとは, f のある持ち上げ F が存在して常に

$$F'(x) > 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

をみたすことである.

定義 2.26 (回転数). $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ を向きを保つ微分同相写像とする. f の回転数 $\text{Rot}(f)$ を, f の勝手な持ち上げ F と勝手な点 $x \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\text{Rot}(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} + 2\pi\mathbb{Z} \quad (\in \mathbb{S}^1)$$

で定義する.

注意 2.27. $\text{Rot}(f)$ は定義から明らかに, f の持ち上げ F と点 $x \in \mathbb{R}$ に依存しているので, $\text{Rot}(f; F, x)$ とでも書くべきであるが, 実は, F と x に依らず, 一定の値に収束することが証明できる (例えば [R, Chapter II, Theorem 8.1] を見よ). 従って, 単に $\text{Rot}(f)$ と書いているのである.

注意 2.28. 第 2.2 節の初めで述べたことに従い, $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ は微分同相写像であるとして回転数を定義したが, 一般的には, 同相写像 $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ に対しても同様に回転数が定義される. 詳しくは [R, Chapter II, Section 2.8] を見よ.

注意 2.29. 実は, f が有理数回転数 $2\pi m/n + 2\pi\mathbb{Z}$ (m, n は互いに素な整数) を持つことと, f が周期 n の周期点を持つことが同値であることが証明できる. 詳しくは [R, Chapter II, Theorem 8.2] を見よ. このように, 次の Denjoy の定理とその注意 2.32 から分かる通り, 回転数という量は, 円周上の力学系のふるまいを支配する面白い量である.

準備が整ったので, Denjoy の定理の定理を述べる. この定理は, 補題 3.5 の証明の一部で用いられる.

定理 2.30 (Denjoy の定理). $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ を, 向きを保つような C^2 微分同相写像とし,

$$\text{Rot}(f) = 2\pi\rho + 2\pi\mathbb{Z} \quad (\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

とかけるとする. このとき, ある点 $x \in \mathbb{S}^1$ が存在して, x の前方軌道

$$\{f^n(x) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$$

は \mathbb{S}^1 で稠密である.

注意 2.31. この定理の証明は [R, Chapter II, Theorem 8.7] を参照せよ.

注意 2.32. この定理の面白い点は, 十分滑らかな円周上の向きを保つ微分同相写像であって, 無理数回転数 $2\pi\rho + 2\pi\mathbb{Z}$ ($\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) を持つものは, 本質的に唯の回転

$$f_\rho : \mathbb{S}^1 \ni x + 2\pi\mathbb{Z} \mapsto \rho + x + 2\pi\mathbb{Z} \in \mathbb{S}^1$$

と同じ (位相共役) になるという点である. 詳しくは [R, Chapter II, Theorem 8.7] を見よ.

3 Hopf-ホモクリニック分岐の研究

この節では, 定理 1.1 を証明する. 第 3.3 節まで Hopf 分岐に関する復習を行い, その次の節から第 3.7 節までで証明のための準備を行って, 第 3.8 節でその証明を達成する.

3.1 Hopf 点と標準形

この節では, Hopf 点を定義し, その点近傍における標準形について述べる.

f を m 次元多様体 ($m \geq 2$) 上の C^r 微分同相写像 ($r \geq 5$) とし, p を周期 $\text{per}(p)$ の f の周期点とする.

定義 3.1 (Hopf 点). 点 p が f の **Hopf** 点であるとは, 次の (i), (ii) を満たすことである. 一番目の条件は次である:

- (i) 微分 $Df^{\text{per}(p)}(p)$ は大きさ 1 の 2 つの複素固有値 $\lambda = e^{i\alpha}$ と $\bar{\lambda} = e^{-i\alpha}$ をもち, かつ残りの固有値は全て大きさ 1 でない. 加えて, 任意の $k = 1, 2, 3, 4, 5$ に対して, $\lambda^k \neq 1$ が成り立つ.

ここで [RT, Proposition 7.1] または [MM, Lemma 6.1] より, p の局所中心多様体 $W_{\text{loc}}^c(p)$ の C^r 座標 (x, y) で次をみたすものが存在する. $p = (0, 0)$ かつ $f^{\text{per}(p)}|_{W_{\text{loc}}^c(p)}$ は原点近傍で次の標準形を持つ:

$$f^{\text{per}(p)}|_{W_{\text{loc}}^c(p)} : (x, y) \mapsto N(x, y) + O(|(x, y)|^5). \quad (3.1)$$

ここで N は, $A, B \in \mathbb{R}$ を定数として, 極座標 (l, θ) で

$$N : (l, \theta) \mapsto (l - Al^3, \alpha + \theta + Bl^2) \quad (3.2)$$

のように与えられる. 二番目の条件は次である:

(ii) $A \neq 0$.

(3.2) に現れる定数 $A \neq 0$ が正ならば, (3.1) より, p は $f^{\text{per}(p)}|_{W_{\text{loc}}^c(p)}$ の吸引点であることに注意せよ. また, A が負ならば, p は $f^{\text{per}(p)}|_{W_{\text{loc}}^c(p)}$ の反発点である. 従って, $W_{\text{loc}}^c(p)$ は一意に定まる C^r 部分多様体である ([HPS, Section 5A] を見よ).

3.2 Hopf 分岐による不変円の生成

この節では, 微分同相写像の族が Hopf 分岐を起こすとき, 通有的な条件のもとで不変円が作られることを述べる.

$F : I \times M \rightarrow M$ を C^r 写像であって, 各 $t \in I$ に対して,

$$F_t : M \ni x \mapsto F(t, x) \in M$$

が C^r 微分同相写像であるようなものとする. ここで, $I = (-1, 1)$ である. F_0 は周期 $\text{per}(p_0)$ の Hopf 点 p_0 を持ち, $\lambda(0) = e^{i\alpha_0}$ ($\alpha_0 \in [0, 2\pi)$) を $DF_0^{\text{per}(p_0)}(p_0)$ の大きさ 1 の固有値の一つとする. 陰関数定理より, 十分小さい任意の t に対して, t に関して連続なある p_t と t に関して連続なある $\lambda(t)$ が存在して次をみたす. $p_t|_{t=0} = p_0$ かつ p_t は F_t の周期 $\text{per}(p_0)$ の周期点, さらに, $\lambda(t)|_{t=0} = \lambda(0)$ かつ $\lambda(t)$ は $DF_t^{\text{per}(p_0)}(p_t)$ の固有値である. p_t , $\lambda(t)$ をしばしば, それぞれ p_0 , $\lambda(0)$ の延長と呼ぶ. $\alpha(0) = \alpha_0$ をみたす連続写像であって, $\lambda(t)$ の偏角であるものを $\alpha(t)$ と書くことにする. このような条件のもとで, 写像 $t \mapsto \lambda(t)$ は C^{r-1} 級であり, 次の定義が可能になる:

定義 3.2 (Hopf 分岐). 族 $\{F_t\}_{t \in I}$ が p_0 で **Hopf 分岐**を起こすとは, F_0 が Hopf 点 p_0 を持つことである. さらに, Hopf 分岐が**通有的**に起きるとは, $DF_t^{\text{per}(p_0)}(p_t)$ の固有値 $\lambda(t)$ が

$$\left. \frac{d}{dt} |\lambda(t)| \right|_{t=0} \neq 0$$

をみたすことである.

この条件は我々に不変円を提供する. 即ち, $\{F_t\}_{t \in I}$ が Hopf 分岐を通有的に起こし, (3.2) に現れる定数 $A \neq 0$ と $\left. \frac{d}{dt} |\lambda(t)| \right|_{t=0}$ が同じ符号を持つならば, [RT, Theorem 7.2] または [MM, Theorem 6.2] より, 十分小さい任意の正の t に対して $F_t^{\text{per}(p_0)}$ -不変な円 C_t が存在する. また, A と $\left. \frac{d}{dt} |\lambda(t)| \right|_{t=0}$ が

異なる符号を持つならば、十分小さい任意の負の t に対して $F_t^{\text{per}(p_0)}$ -不変な円 C_t が存在する。 $A > 0$ ならばこの不変円 C_t は局所中心多様体の延長 \widetilde{W}_t 上で吸引的である。逆に、 $A < 0$ ならば C_t は \widetilde{W}_t 上で反発的である。図 3.1 を見よ。

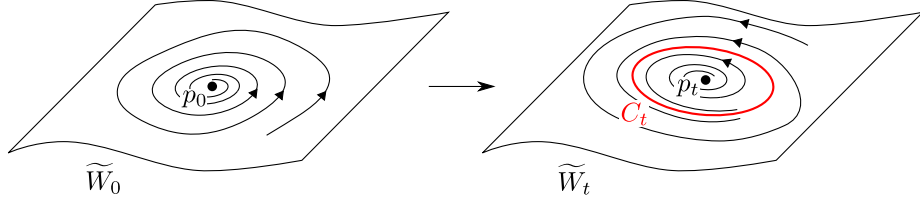


図 3.1: Hopf 分岐による不変円 ($A > 0$ の場合)

3.3 不変円の回転数

この節では、Hopf 分岐を起こす写像族の不変円上の回転数を導入したあと、Martín [M] で調べられた結果について述べる。補題 3.3 では、導入した回転数が定数にならないことは通有的な条件であることを述べる。さらに、補題 3.4 では、通有的な条件のもとで適切なパラメータを選ぶと、不変円上に唯二つの双曲型周期軌道が現れることを述べる。

第 3.2 節で与えられた 1-パラメータの微分同相写像の族 $\{F_t\}_{t \in I}$ を思い出そう。以下では $A > 0$ かつ $\frac{d}{dt}|\lambda(t)|\big|_{t=0} > 0$ の場合のみを考える。他の場合も同様の結果が得られる。円周を第 2.2 節と同様に $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ で表し、 $h_t : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow C_t$ を勝手な同相写像とする。 $F_t^{\text{per}(p_0)}|_{C_t}$ の回転数を、 $x \in \mathbb{R}$ と

$$h_t^{-1} \circ (F_t^{\text{per}(p_0)}|_{C_t}) \circ h_t : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

の持ち上げ $\varphi_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$\text{Rot}(F_t^{\text{per}(p_0)}|_{C_t}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_t^n(x) - x}{n} + 2\pi\mathbb{Z}$$

で定義する。ここで、 $h_t^{-1} \circ (F_t^{\text{per}(p_0)}|_{C_t}) \circ h_t$ の持ち上げとは、標準的な射影を $\text{pr} : \mathbb{R} \ni x \mapsto x + 2\pi\mathbb{Z} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ とするとき、

$$\text{pr} \circ \varphi_t = (h_t^{-1} \circ (F_t^{\text{per}(p_0)}|_{C_t}) \circ h_t) \circ \text{pr}$$

をみたす同相写像 $\varphi_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ のことである。さらに、関数 ρ を

$$\rho(t) := \begin{cases} \alpha(0) + 2\pi\mathbb{Z} & (t = 0) \\ \text{Rot}(F_t^{\text{per}(p_0)}|_{C_t}) & (t > 0) \end{cases}$$

で定める。実は、関数 ρ は、点 $x \in \mathbb{R}$ と同相写像 h_t, φ_t の選び方に依らず定まり、さらに ρ は連続であることも示される。詳しいことは Martín の論文

[M, p. 898] を見よ. この関数に対し Martín は次の補題を示し, 回転数が定数にならないことは通有的な条件であることを明らかにした.

補題 3.3 ([M, Lemma 1]). Hopf 分岐を通有的に起こす族 $\{F_t\}_{t \in I}$ に対して定義される関数 ρ は 0 で微分可能であり,

$$\rho'(0) = \alpha'(0) + \frac{B}{A} \frac{d}{dt} |\lambda(t)| \Big|_{t=0}$$

をみたす. ここで, A, B は (3.2) に現れる定数である.

次のようにおく:

$$\mathcal{F} := \{F \in C^r(I \times M, M) \mid \text{任意の } t \in I \text{ に対して } F_t \text{ は } C^r \text{ 微分同相写像}\}.$$

ここで, $C^r(I \times M, M)$ は C^r 位相を備えた $I \times M$ から M への C^r 写像全体の空間であり, 各 $t \in I$ に対し F_t は写像 $M \ni x \mapsto F(t, x) \in M$ を表す. さらに, 各 $F \in \mathcal{F}$ と各 $k \in \{1, 2, \dots\}$ に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_k(F) &:= \{(t, x) \in I \times M \mid \\ &F_t^k(x) = x \text{ かつ } F_t^n(x) \neq x \ (n = 1, 2, \dots, k-1)\}, \end{aligned}$$

さらに

$$\mathcal{X}_k(F) := \{(t, x) \in \mathcal{Z}_k(F) \mid x \text{ は } F_t \text{ に関して非双曲型}\}$$

とおく. [B, Theorem 1] より, ある残留集合 $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ が存在して, 各 $F \in \mathcal{F}'$ と各 $k \in \{1, 2, \dots\}$ に対して, $\mathcal{Z}_k(F)$ は $I \times M$ の 1 次元部分多様体となり, かつ $\mathcal{X}_k(F)$ は離散空間となる. $\mathcal{F}'' \subset \mathcal{F}'$ を, 任意の $t \in I$ に対して F_t が非双曲型周期軌道は多くても 1 つしかもたないような部分集合, と定める. $\mathcal{X}_k(F)$ は離散であるから, \mathcal{F}'' は \mathcal{F}' の残留集合である ([M, p. 899] も見よ). Martín は次の補題で, 通有的な条件のもとで適切なパラメータを選ぶと, 不変円上に唯二つの双曲型周期軌道が現れることを示した.

補題 3.4 ([M, Lemma 2]). $F \in \mathcal{F}''$ を, Hopf 分岐を通有的におこす 1-パラメータの微分同相写像の族であって, $\rho'(0) \neq 0$ をみたすものとする. さらに, $r \in \{2\pi s + 2\pi\mathbb{Z} \mid s \in \mathbb{Q}\}$ とし, $[\tau_1, \tau_2]$ ($\tau_1 < \tau_2$) を $\rho^{-1}(r)$ の連結成分とする. このとき, ある $\tau_3 \in (\tau_1, \tau_2)$ が存在して, 任意の $t \in (\tau_1, \tau_3)$ に対して, $F_t^{\text{per}(p_0)}|_{C_t}$ は唯二つの周期軌道 \mathcal{O}_t^+ と \mathcal{O}_t^- を持つ. さらに, これらは $F_t^{\text{per}(p_0)}|_{C_t}$ の双曲型周期軌道であり, $F_t^{\text{per}(p_0)}|_{C_t}$ に関して, \mathcal{O}_t^+ は反発的で \mathcal{O}_t^- は吸引的である. 図 3.2 を見よ.

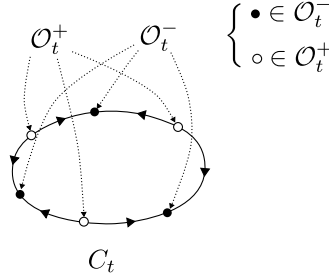


図 3.2: 不変円上の二つの双曲型周期軌道

3.4 定理 1.1 の証明のための一般性を失わない仮定

この節では、定理 1.1 の証明の記述を簡単にするための、幾つかの仮定を置く。それらは読者の確認用に、文中で項目化されている。

f を定理 1.1 にある、 m 次元の Riemann 多様体 M 上の微分同相写像とする。 f は **Hopf**-ホモクリニックサイクルを持つ、つまり、 f は Hopf 点 p を持ち、 p に同伴するホモクリニック点 q が存在する。ここで、 q が p に同伴するホモクリニック点であるとは、 d を M と同じ位相を定める勝手な距離とするとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(q), f^n(p)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(q), f^{-n}(p)) = 0, \quad q \neq p \quad (3.3)$$

をみたすことである。以下、次の仮定を常に置く：

- p は f の不動点である。

この仮定をみたさない場合は、 f を $f^{\text{per}(p)}$ に置きかえることにより、この仮定をみたす場合と同様の議論が可能である。

$Df(p)$ の大きさ 1 未満の固有値の重複度込みの数を m_s とおき、大きさ 1 超過の固有値の重複度込みの数を m_u とおく。定義 3.1-(i) より、

$$m_s + 2 + m_u = m$$

が従う。安定多様体、不安定多様体、中心多様体、中心-安定多様体、中心-不安定多様体をそれぞれ $W^s(p)$, $W^u(p)$, $W^c(p)$, $W^{cs}(p)$, $W^{cu}(p)$ で書くことにする。Hopf 点の場合では、[HPS, Section 5A] より、これらの多様体は p を含む一意に定まる C^r 部分多様体であることに注意せよ。上の設定では

$$\begin{aligned} \dim W^s(p) &= m_s, \quad \dim W^u(p) = m_u, \quad \dim W^c(p) = 2, \\ \dim W^{cs}(p) &= m_s + 2, \quad \dim W^{cu}(p) = m_u + 2 \end{aligned}$$

である。

定義 3.1 にある、 f の p の近傍における標準形 (3.1) を思い出そう。以下、次の仮定を常に置く：

- $A > 0$.

この仮定をみたさない場合は、この仮定をみたす場合と同様の議論が可能である。このとき、中心-安定多様体 $W^{cs}(p)$ と不安定多様体 $W^u(p)$ は次の性質を持つ：

$$W^{cs}(p) = \left\{ x \in M \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p \right\},$$

$$W^u(p) = \left\{ x \in M \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(x) = p \right\}.$$

$A > 0$ という仮定は、 $W^{cs}(p) \supsetneq W^s(p)$ を導く。(3.3) より、

$$q \in W^{cs}(p) \cap W^u(p) \setminus \{p\}$$

が従う。さらに、我々は次の二つを仮定して良い：

- $W^{cs}(p)$ と $W^u(p)$ は q で横断的に交わる、即ち、

$$T_q W^{cs}(p) + T_q W^u(p) = T_q M$$

である。

- $q \notin W^s(p)$.

実際、そうでなければ、 f の C^r でいくらでも近いところに上の二つのアイテムをみたすような微分同相写像 \tilde{f} が存在するので、 \tilde{f} を改めて f と思えば良い。

3.5 不変円上の双曲型周期軌道の稠密な増殖

この節では、Martín [M] と同様に、Hopf 分岐を起こす写像族に通有的な仮定を置くことで、0 にいくらでも近い正数 t_∞ が存在して、 t_∞ に収束するパラメータの狭義単調増加列 $\{t_j\}_j$ と、不変円 C_{t_j} 上の双曲型周期軌道 $\mathcal{O}_{t_j}^+, \mathcal{O}_{t_j}^-$ が唯二つ存在して、 $\mathcal{O}_{t_j}^+$ と $\mathcal{O}_{t_j}^-$ は $j \rightarrow \infty$ のとき C_{t_j} 上で稠密になることを示す（補題 3.5）。

補題 3.5 を述べるために用語を定義をする。 $\epsilon > 0$ に対し、距離空間 (C, d) の部分集合 \mathcal{O} が、 C 内で ϵ -稠密であるとは、任意の $x \in C$ に対して、ある $y \in \mathcal{O}$ が存在して、 $d(x, y) < \epsilon$ をみたすことである。

補題 3.5. f を定理 1.1 にある微分同相写像とし、 $I = (-1, 1)$ 、 \mathcal{N} を $\text{Diff}^r(M)$ における f の任意の C^r 近傍とする。このとき、 $\{F_t\}_{t \in I} \subset \mathcal{N}$ をみたす C^r 級の 1-パラメータの微分同相写像の族 $F : I \times M \rightarrow M$ が存在して、次の条件 (i)–(iii) をみたす。初めの条件は次である：

- (i) F_0 は p_0 に同伴する Hopf-ホモクリニックサイクルを持ち、 $q_0 \notin W^s(p_0)$ をみたす p_0 に同伴するホモクリニック点 q_0 も持つ。

$\lambda(0)$ を $DF_0(p_0)$ の大きさ 1 の固有値の一つとする. $p_0, \lambda(0)$ の延長をそれぞれ, $p_t, \lambda(t)$ で書くことにする. 二番目の条件は次である:

$$(ii) \quad \left. \frac{d}{dt} |\lambda(t)| \right|_{t=0} > 0.$$

この条件より, $\{F_t\}_{t \in I}$ は p_0 で通有的に Hopf 分岐を起こすことが分かる. 第 3.2 節で述べたように, 十分小さい任意の正の t に対して, F_t -不変な円 C_t が存在する. 三番目の条件は次である:

(iii) 十分小さい任意の正の τ に対して, ある $t_\infty \in (0, \tau]$ と $\lim_{j \rightarrow \infty} t_j = t_\infty$ をみたすある狭義単調増加列 $\{t_j\}_j \subset (0, t_\infty)$ が存在して, 任意の j に対して, $F_{t_j}|_{C_{t_j}}$ は唯二つの周期軌道 $\mathcal{O}_{t_j}^+, \mathcal{O}_{t_j}^-$ をもち, $\mathcal{O}_{t_j}^+, \mathcal{O}_{t_j}^-$ は次の条件 (a), (b) をみたす. 図 3.3 を見よ.

- (a) 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある j_0 が存在して, 任意の $j \geq j_0$ に対して, $\mathcal{O}_{t_j}^+$ と $\mathcal{O}_{t_j}^-$ は C_{t_j} 内で ϵ -稠密である.
- (b) $\mathcal{O}_{t_j}^+$ と $\mathcal{O}_{t_j}^-$ は F_{t_j} に関して双曲型である. さらに, $F_{t_j}|_{C_{t_j}}$ に関して $\mathcal{O}_{t_j}^+$ は反発的で, $\mathcal{O}_{t_j}^-$ は吸引的である.

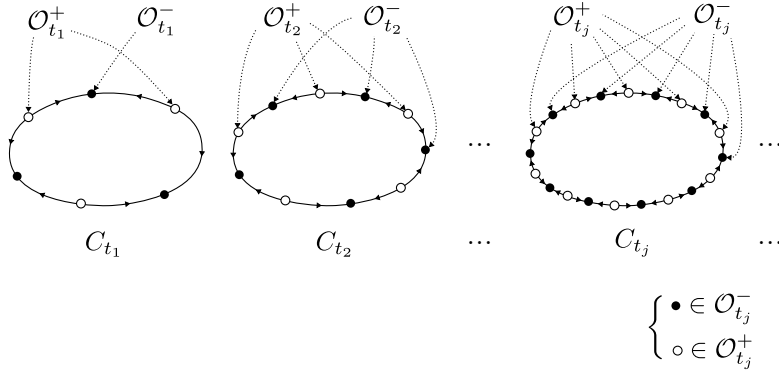


図 3.3: 不変円上の二つの双曲型周期軌道の稠密な増殖

注意 3.6. この補題と同じ主張は, Martín [M, Section 3] で暗に述べられているが, 厳密性を重視して我々はこちらではっきりと証明しておく.

補題 3.5 の証明. 第 3.3 節にある残留集合 \mathcal{F}'' を思い出そう. f は第 3.4 節にある仮定 $q \notin W^s(p)$ をみたしていることに注意すると, 補題 3.3 より, $\rho'(0) \neq 0$ をみたす C^r 級の微分同相写像のある族 $F \in \mathcal{F}''$ が存在して, この補題の二つの条件 (i), (ii) をみたす. 以下ではこの微分同相写像の族 F がこの補題の残りの条件 (iii)-(a), (b) をみたすことを確認する.

$\rho'(0) \neq 0$ なので, 十分小さい任意の正の τ に対して, ある $t'_\infty \in (0, \tau]$ が存在して,

$$\rho(t'_\infty) \notin \{2\pi s + 2\pi\mathbb{Z} \mid s \in \mathbb{Q}\}$$

をみたす． $[\tau_1^\infty, \tau_2^\infty]$ （但し， $(0 < \tau_1^\infty \leq \tau_2^\infty)$ ）を逆像 $\rho^{-1}(\rho(t'_\infty))$ の t'_∞ を含む連結成分とし， $t_\infty := \tau_1^\infty$ と定める． $\lim_{j \rightarrow \infty} t'_j = t_\infty$ となるような狭義単調列 $\{t'_j\}_j \subset (0, t_\infty)$ を，

$$\rho(t'_j) = \frac{2\pi i_j}{k_j} + 2\pi\mathbb{Z} \in \{2\pi s + 2\pi\mathbb{Z} \mid s \in \mathbb{Q}\} \text{ かつ } k_j > j$$

をみたすように定める．ここで， $k_j (\neq 0)$ と i_j は互いに素な整数であって，任意の j に対して $0 \leq i_j \leq k_j$ をみたすものである．各 j に対して，

$$r_j := \rho(t'_j)$$

と定め，逆像 $\rho^{-1}(r_j)$ の t'_j を含む連結成分を $[\tau_1^j, \tau_2^j]$ ($\tau_1^j < \tau_2^j$) で書くことにする．各 j に対して，補題 3.4 の条件をみたす $\tau_3^j \in (\tau_1^j, \tau_2^j)$ が得られる．任意の j に対して

$$t_j := \frac{\tau_1^j + \tau_3^j}{2}$$

と定めれば， $\lim_{j \rightarrow \infty} t_j = t_\infty$ となるような狭義単調増加列 $\{t_j\}_j$ を得ることができるが，特に各 j に対して補題 3.4 から定まる $\mathcal{O}_{t_j}^+$ と $\mathcal{O}_{t_j}^-$ は，補題 3.5 の条件 (iii)-(b) をみたしている．

さて最後に， $\mathcal{O}_{t_j}^+$ と $\mathcal{O}_{t_j}^-$ は補題 3.5 の条件 (iii)-(a) をみたしていることを背理法によって示す．もし $\{\mathcal{O}_{t_j}^+\}_j$ が (iii)-(a) をみたしていないとすると，ある $\epsilon_0 > 0$ と $\{t_j\}_j$ のある部分列 $\{t_{j_k}\}$ が存在して， $C_{t_{j_k}} \setminus \mathcal{O}_{t_{j_k}}^+$ は長さが ϵ_0 より大きい連結成分 I_k を持つ．このとき，任意の k に対して， $I_k, F_{t_{j_k}}(I_k), \dots, F_{t_{j_k}}^{j_k}(I_k)$ はどの二つも互いに交わらない区間たちである．従って，列 $\{I_k\}_k$ は， $F_{t_\infty}|_{C_{t_\infty}}$ の遊走区間へ収束するような部分列を持つ．これは Denjoy の定理に反する．なぜならば， $\rho(t_\infty) \notin \{2\pi s + 2\pi\mathbb{Z} \mid s \in \mathbb{Q}\}$ かつ $F_{t_\infty}|_{C_{t_\infty}}$ は C^2 微分同相写像だからである．全く同様の方法，もしくは $\{\mathcal{O}_{t_j}^-\}_j$ が補題 3.5 の条件 (iii)-(a) をみたしていることから， $\{\mathcal{O}_{t_j}^-\}_j$ も (iii)-(a) をみたしていることが確認できる．これで補題 3.5 の証明が完了した． \square

3.6 不安定円筒と安定多様体との交差

この節の説明の前に，Hopf 分岐を通有的に起こす微分同相写像の族に対して，生成される不変円 C_t の安定多様体 $W^s(C_t)$ と不安定多様体 $W^u(C_t)$ が，十分小さい任意の t に対して存在することに注意せよ．実際，[RT, MM] より生成される不変円は r -正規双曲型なので，[HPS, Theorem 4.1] より， $W^s(C_t)$ と $W^u(C_t)$ が存在する． r -正規双曲型 (r -normally hyperbolic) の定義は [HPS] を見よ．

この節では，初めに命題 3.7 で，Hopf-ホモクリニック分岐で生成される不変円の不安定多様体（円筒） $W^u(C_t)$ と安定多様体 $W^s(C_t)$ が，図 3.4 で表

をみたす.

証明. 補題 3.5-(i) より, $q_0 \notin W^s(p_0)$ である. さらに, [HPS, p. 65] より, 中心-安定多様体, 不安定多様体, 安定多様体の延長の連続性は, 微分同相写像の可微分性に依存するので, (i) と (ii) は直ぐに分かる事実である.

十分小さい任意の正の t に対して不変円 C_t は r -正規双曲型であることに注意すると, [HPS, Theorem 4.1] より, $W^u(C_t)$ は m_u 次元の強不安定多様体 $W_t^{uu}(x)$ ($x \in C_t$) によって直和分割されていて, $W^s(C_t)$ も $(m_s + 1)$ 次元の強安定多様体 $W_t^{ss}(x)$ ($x \in C_t$) によって直和分割されている. 十分小さい任意の正の t に対して, $q_t \notin W^s(p_t)$ であったから, $W_t^{uu}(x) \cap W_t$ は, (iii) にある条件をみたすような横断的交差点 $r_t(x)$ を持つ. 以上で証明が完了した. \square

次に、前の命題と同じ仮定のもとで、適切なパラメータ列 $\{t_j\}_j$ を選ぶことで、不変円 C_{t_j} 上の反発的な周期軌道 $\mathcal{O}_{t_j}^+$ の安定多様体が $j \rightarrow \infty$ のとき W_{t_j} 内で $1/j$ -稠密になることをみる。次の命題ではさらに、図 3.6 にある収束列 $\{x_{t_j}\}_j, \{y_{t_j}\}_j, \{z_{t_j}\}_j, \{w_{t_j}\}_j$ を取るが、これらは定理 1.1 の証明で行う摂動のために用意された点である。具体的に説明すると、定理 1.1 の証明では元の f を摂動して \tilde{F}_{t_j} を得るが、 z_{t_j} は \tilde{F}_{t_j} に関する x_{t_j} と w_{t_j} に同伴するヘテロクリニック点になる。

命題 3.8. $\{F_t\}_{t \in I}$ を補題 3.5 で与えられる微分同相写像の族とする. さらに, $t_\infty, \{t_j\}_j, O_{t_j}^\pm$ をそれぞれ補題 3.5 にあるものと同じ数, 列, 周期軌道とし, x_{t_∞} を C_{t_∞} 内の任意の点とする (図 3.5 を見よ). このとき, 次が成り

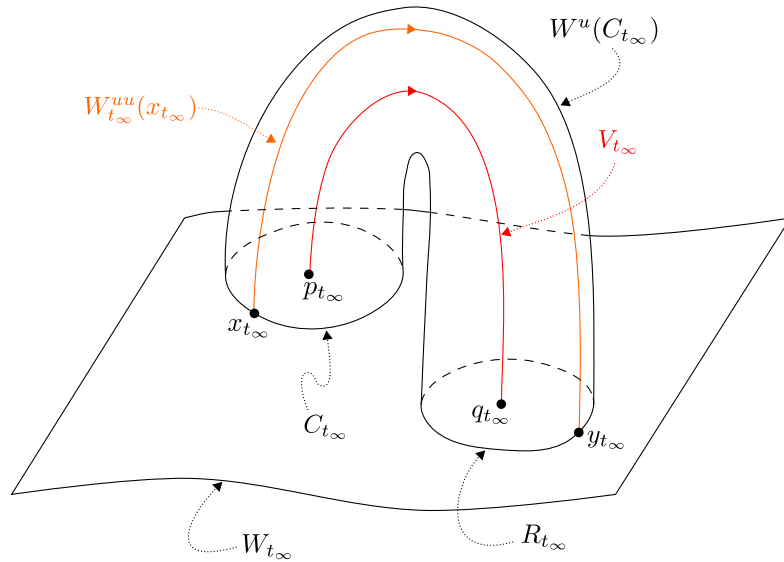


図 3.5: x_{t_∞} と y_{t_∞}

立つ：

- (i) $\{t_j\}_j$ のある部分列 $\{t_{j_k}\}_k$ が存在して、任意の k に対して $W^s(\mathcal{O}_{t_{j_k}}^+) \cap W_{t_{j_k}}$ は $W_{t_{j_k}}$ 内で $1/j_k$ -稠密である。

表記を簡単にするため、部分列 $\{t_{j_k}\}_k$ を改めて $\{t_j\}_j$ と書く。

- (ii) 各 j に対して、ある $x_{t_j}, y_{t_j}, z_{t_j}, w_{t_j}$ (図 3.6 を見よ) が存在して

- $x_{t_j} \in \mathcal{O}_{t_j}^-, y_{t_j} = r_{t_j}(x_{t_j}), w_{t_j} \in \mathcal{O}_{t_j}^+, z_{t_j} \in W^s(w_{t_j}) \cap W_{t_j}$,
- $d(z_{t_j}, y_{t_j}) < 1/j$,
- $u\text{-index}(x_{t_j}) + 1 = u\text{-index}(w_{t_j})$,
- $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{t_j} = x_{t_\infty}, \lim_{j \rightarrow \infty} y_{t_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} z_{t_j} = y_{t_\infty}$

をみたす。ここで、 $r_t(\cdot)$ は命題 3.7-(iii) にある記号であり、 $y_{t_\infty} = r_{t_\infty}(x_{t_\infty})$

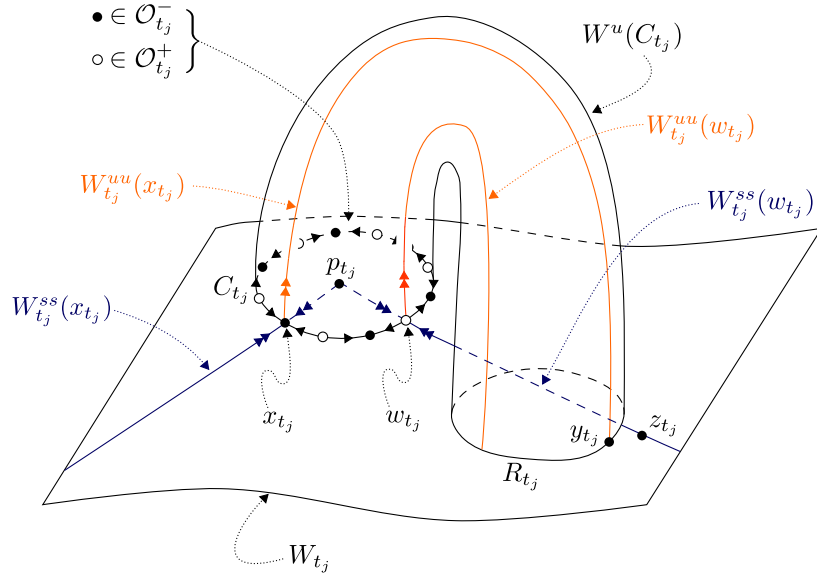


図 3.6: $x_{t_j}, y_{t_j}, z_{t_j}, w_{t_j}$ の位置

かつ、 $u\text{-index}(\cdot)$ は \cdot の不安定多様体の次元である。

証明. 小さい $t_\infty > 0$ と数列 $\{t_j\}_j \subset (0, t_\infty)$ を補題 3.5-(iii) にあるものとする、 C_t は十分小さい任意の t に対して r -正規双曲型であったので、

$$W^s(\mathcal{O}_{t_j}^+) = \bigcup_{x \in \mathcal{O}_{t_j}^+} W_{t_j}^{ss}(x)$$

が各 j で成り立つことに注意する。命題 3.7-(i) を思い出すと W_t は有界であったので、補題 3.5-(iii)-(a) より、任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある $j(\epsilon)$ が存

在して、任意の $j \geq j(\epsilon)$ に対して $W^s(\mathcal{O}_{t_j}^+) \cap W_{t_j}$ は W_{t_j} 内で ϵ -稠密になる。
従って、 $\{j\}_j$ の部分列 $\{j_k\}_k$ を

$$\begin{cases} j_1 := j(\epsilon)|_{\epsilon=1}, \\ j_{k+1} := \max \left\{ j_k + 1, j(\epsilon)|_{\epsilon=1/(k+1)} \right\}, \end{cases}$$

と定めれば、 $\{t_j\}_j$ の部分列 $\{t_{j_k}\}_k$ は、命題 3.8-(i) を証明する。

次に $\mathcal{O}_{t_j}^-$ の点 x_{t_j} を

$$\min_{x \in \mathcal{O}_{t_j}^-} d(x, x_{t_\infty}) = d(x_{t_j}, x_{t_\infty})$$

となるように定める。 $r_t(\cdot)$ を命題 3.7-(iii) にある記号とし、 $y_{t_j} := r_{t_j}(x_{t_j})$ と定める。 $W^s(\mathcal{O}_{t_j}^+) \cap W_{t_j}$ は W_{t_j} 内で $1/j$ -稠密であるから、ある $w_{t_j} \in \mathcal{O}_{t_j}^+$ とある $z_{t_j} \in W^s(w_{t_j}) \cap W_{t_j}$ が存在して、 $d(z_{t_j}, y_{t_j}) < 1/j$ をみたす。 図 3.6 を見よ。 補題 3.5-(iii)-(b) より、

$$u\text{-index}(x_{t_j}) + 1 = m_u + 1 = u\text{-index}(w_{t_j})$$

が従う。最後に、 $\{x_{t_j}\}_j, \{y_{t_j}\}_j, \{z_{t_j}\}_j$ の収束性は、これらの構成方法から直ぐに従う。これで命題 3.8-(ii) の証明が完了した。 \square

3.7 局所的にロバストなホモクリニック軌道

図 3.5 にある点 y_{t_∞} と、それに収束する、図 3.6 にある点 y_{t_j} を思い出そう。この節では、 y_{t_∞} を含む十分小さい任意の開円板 U に対して、 $\hat{y}_{t_j} (:= F_{t_j}^{-1}(y_{t_j}))$ の F_{t_j} -後方軌道が U と交わらなければ、 $M \setminus \hat{U}$ ($\hat{U} := F_{t_j}^{-1}(U)$) 上で $\tilde{F}_{t_j} = F_{t_j}$ となる任意の C^r 微分同相写像 $\tilde{F}_{t_j} : M \rightarrow M$ に対して、 \hat{y}_{t_j} の F_{t_j} -後方軌道と \tilde{F}_{t_j} -後方軌道が全く同じになることをみる。これと同様の結果が、 y_{t_∞} に収束する、図 3.6 にある点 z_{t_j} についても成り立つ。詳しくは補題 3.10 を見よ。

しかしながら、 y_{t_∞} を含む開円板 U であって、 $\hat{y}_{t_j} (:= F_{t_j}^{-1}(y_{t_j}))$ の F_{t_j} -後方軌道が U と交わらないものが、実際に存在するのかが問題となる。そこで、初めに次の補題で、そのような開円板 U の存在を示す。

補題 3.9. $\{F_t\}_{t \in I}$ を補題 3.5 で与えられる微分同相写像の族とし、 $y_{t_\infty}, \{z_{t_j}\}_j, \{y_{t_j}\}_j$ を命題 3.8 と同じ点、点列とする。このとき、ある $\delta > 0$ が存在して、十分大きい任意の j に対して、

$$\{z_{t_j}, F_{t_j}(z_{t_j}), F_{t_j}^2(z_{t_j}), \dots\} \cap \hat{U}_\delta = \emptyset, \quad (3.4)$$

$$\{\hat{y}_{t_j}, F_{t_j}^{-1}(\hat{y}_{t_j}), F_{t_j}^{-2}(\hat{y}_{t_j}), \dots\} \cap U_\delta = \emptyset \quad (3.5)$$

が成り立つ。ここで、 $\hat{y}_{t_j} := F_{t_j}^{-1}(y_{t_j})$, $\hat{U}_\delta := F_{t_j}^{-1}(U_\delta)$ であり、 U_δ は y_{t_∞} の M 内の δ -近傍である。

証明. 命題 3.8 の数 t_∞ は十分小さいので, 命題 3.7-(iii) より, 任意の j について $y_{t_j} \in W^s(C_{t_j})$ が従う. このとき, t_∞ に十分近い任意の t について, 安定多様体 $W^s(C_t)$ に関するある基本領域 A_t^s が存在して, A_t^s は t に関して連続的に動き, かつ $y_{t_\infty} \in \text{Int}_{W^s(C_t)}(A_{t_\infty}^s)$ をみtas. ここで, 空間 W に対して, $\text{Int}_W(\cdot)$ は W の部分空間としての \cdot の内部を表す. 図 3.7 を見よ. 但し,

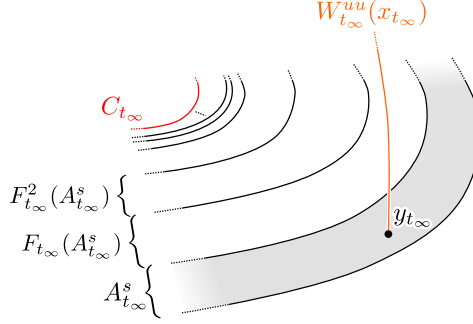


図 3.7: 基本領域 $A_{t_\infty}^s$ の外形

$W^s(C_t)$ の基本領域 A_t^s とは, 閉集合 $A_t^s \subset W^s(C_t) \setminus C_t$ であって次の条件をみたすものである: ある集合 $\tilde{A}_t^s \subset W^s(C_t) \setminus C_t$ が存在して

$$A_t^s = \text{Cl}_{W^s(C_t)}(\tilde{A}_t^s) \quad \text{かつ} \quad F_t^n(\tilde{A}_t^s) \cap \tilde{A}_t^s = \emptyset \quad (n = 1, 2, \dots)$$

かつ

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} F_t^n(\tilde{A}_t^s) = W^s(C_t) \setminus C_t$$

をみtas. ここで, 空間 W に対して, $\text{Cl}_W(\cdot)$ は W の部分集合としての \cdot の閉包を表す. 次のように

$$W'_t := \bigcup_{n=0}^{\infty} F_t^n(A_t^s) \cup C_t$$

と定めると, W'_t は M の部分多様体になる.

$F_{t_\infty}^{-1}(y_{t_\infty}) \notin \text{Cl}_{W^s(C_{t_\infty})}(W'_{t_\infty})$ なので, W'_{t_∞} の M におけるある開近傍 $U(W'_{t_\infty})$ と, ある $\delta > 0$ が存在して,

$$U(W'_{t_\infty}) \cap F_{t_\infty}^{-1}(U_{2\delta}) = \emptyset$$

をみtas. 従って, 十分大きい任意の j について,

$$U(W'_{t_\infty}) \cap F_{t_j}^{-1}(U_\delta) = U(W'_{t_\infty}) \cap \hat{U}_\delta = \emptyset$$

となる. $W'_{t_j} \subset U(W'_{t_\infty})$ となる, 十分大きい任意の j について,

$$\{z_{t_j}, F_{t_j}(z_{t_j}), F_{t_j}^2(z_{t_j}), \dots\} \cap \hat{U}_\delta \subset W'_{t_j} \cap \hat{U}_\delta = \emptyset$$

をみだし、即ちこれは、 \widehat{U}_δ が (3.4) をみたすことを意味する。これで証明の前半部分が終わった。

次に、不安定多様体 $W^u(C_t)$ の基本領域 A_t^u であって、 A_t^u は t に関して連続的に動き、かつ $y_{t_\infty} \in \text{Int}_{W^u(C_{t_\infty})}(A_{t_\infty}^u)$ をみたすものをとる。図 3.8 を見よ。 A_t^s のときと同様の議論を行うことにより、証明の後半部分を示すことが

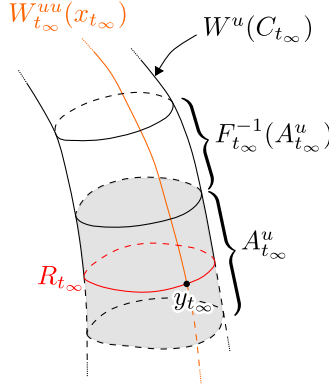


図 3.8: 基本領域 $A_{t_\infty}^u$ の外形

できる。即ち、小さいある $\delta > 0$ が存在して、十分大きい任意の j に対して、 U_δ は (3.5) をみたす。以上で証明が完了した。 \square

補題 3.10. 補題 3.9 と同じ仮定のもとで、 U を y_{t_∞} を含む M の開円板とし、 $\widehat{U} := F_{t_j}^{-1}(U)$ と定める。 z_{t_j} の F_{t_j} -前方軌道が \widehat{U} と交わらず、 \widehat{y}_{t_j} の F_{t_j} -後方軌道が U と交わらないことを仮定する。このとき、 $M \setminus \widehat{U}$ 上で $\widetilde{F}_{t_j} = F$ となる任意の C^r 微分同相写像 $\widetilde{F}_{t_j} : M \rightarrow M$ に対して、

$$\widetilde{F}_{t_j}^n(z_{t_j}) = F_{t_j}^n(z_{t_j}), \quad \widetilde{F}_{t_j}^{-n}(\widehat{y}_{t_j}) = F_{t_j}^{-n}(\widehat{y}_{t_j})$$

が任意の $n = 0, 1, \dots$ で成り立つ。

証明. 上の補題の仮定から、

$$\begin{aligned} \{z_{t_j}, F_{t_j}(z_{t_j}), F_{t_j}^2(z_{t_j}), \dots\} \cap \widehat{U} &= \emptyset, \\ \{\widehat{y}_{t_j}, F_{t_j}^{-1}(\widehat{y}_{t_j}), F_{t_j}^{-2}(\widehat{y}_{t_j}), \dots\} \cap U &= \emptyset \end{aligned}$$

が成り立つ。 \widetilde{F}_{t_j} は \widehat{U} の補集合上で F_{t_j} と等しいので、 $\widetilde{F}_{t_j}^n(z_{t_j}) = F_{t_j}^n(z_{t_j})$ が任意の $n = 0, 1, \dots$ で成り立つことは直ぐ分かる。

次に、 $F_{t_j}^{-1}(M \setminus U) = M \setminus \widehat{U}$ なので、任意の $x \in M \setminus U$ に対して、

$$\widetilde{F}_{t_j}(F_{t_j}^{-1}(x)) = F_{t_j}(F_{t_j}^{-1}(x)) = x$$

が成り立つ。これは、 $M \setminus U$ 上で

$$\widetilde{F}_{t_j}^{-1} = F_{t_j}^{-1}$$

が成り立つことを意味する．従って、 $\tilde{F}_{t_j}^{-n}(\hat{y}_{t_j}) = F_{t_j}^{-n}(\hat{y}_{t_j})$ が任意の $n = 0, 1, \dots$ で成り立つことが分かる．以上で証明が完了した． \square

3.8 定理 1.1 の証明

この節では、定理 1.1 を、第 3.4 節で項目化されている仮定のもとで証明する．

定理 1.1 の証明. $\{F_t\}_{t \in I}$ を補題 3.5 にある微分同相写像の族とし、 $\delta > 0$ を補題 3.9 で与えられる定数とする． $\delta > 0$ はいくらでも小さくできるので、 U_δ には座標 $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$ であって、 $y_{t_\infty} = (0, \dots, 0)$ となるものが入っていると思って良い．次をみたす C^r 級の隆起関数 $\beta : M \rightarrow \mathbb{R}$ を取る：

$$\begin{aligned}\beta(x) &= 1 & (x \in U_{\delta/3}), \\ \beta(x) &= 0 & (x \in M \setminus U_{2\delta/3}).\end{aligned}$$

上で定義した座標を用いて、十分大きい任意の各 j に対し、 C^r 写像 $\tilde{F}_{t_j} : M \rightarrow M$ を

$$\begin{cases} \tilde{F}_{t_j}(x) = F_{t_j}(x) & (x \in M \setminus \hat{U}_\delta), \\ \tilde{F}_{t_j}(x) = F_{t_j}(x) + \beta(F_{t_j}(x))(z_{t_j} - y_{t_j}) & (x \in \hat{U}_\delta) \end{cases}$$

で定める． U_δ は j に依存しないので、十分大きい任意の j に対して、 $\tilde{F}_{t_j} \in \mathcal{N}$ が成り立つ．ここで、 \mathcal{N} は補題 3.5 で与えられていた f の C^r 近傍である．

最後に、 \tilde{F}_{t_j} は $\mathcal{O}_{t_j}^+$ と $\mathcal{O}_{t_j}^-$ に関する余指数が 1 のヘテロ次元サイクルを持つことを見る． $\delta > 0$ が小さいことから、 $\mathcal{O}_{t_j}^+$ と $\mathcal{O}_{t_j}^-$ は \tilde{F}_{t_j} に関する双曲型周期軌道である．補題 3.10 より、

$$z_{t_j} \in W^s(w_{t_j}, \tilde{F}_{t_j}) \subset W^s(\mathcal{O}_{t_j}^+, \tilde{F}_{t_j}) \quad (3.6)$$

である．ここで、 $W^s(\cdot, \tilde{F}_{t_j})$ は \tilde{F} に関する \cdot の安定多様体を表す．後で使うので、 $W^u(\cdot, \tilde{F}_{t_j})$ は \tilde{F}_{t_j} に関する \cdot の不安定多様体を表すことも定義しておく．十分大きい任意の j に対して、 $y_{t_j} \in U_{\delta/3}$ であるから、

$$\tilde{F}_{t_j}(\hat{y}_{t_j}) = F_{t_j}(\hat{y}_{t_j}) + \beta(F_{t_j}(\hat{y}_{t_j}))(z_{t_j} - y_{t_j}) = z_{t_j}$$

であるから従って、

$$\tilde{F}_{t_j}^{-1}(z_{t_j}) = \hat{y}_{t_j}$$

である．これと補題 3.10 より、

$$z_{t_j} \in W^u(x_{t_j}, \tilde{F}_{t_j}) \subset W^u(\mathcal{O}_{t_j}^-, \tilde{F}_{t_j})$$

を得る．これと (3.6) を合わせることで,

$$z_{t_j} \in W^s(\mathcal{O}_{t_j}^+, \tilde{F}_{t_j}) \cap W^u(\mathcal{O}_{t_j}^-, \tilde{F}_{t_j}) \quad (3.7)$$

をうる．即ち, z_{t_j} は $\mathcal{O}_{t_j}^+$ と $\mathcal{O}_{t_j}^-$ に同伴するヘテロクリニック点になっている．一方で, $C_{t_j} \setminus (\mathcal{O}_{t_j}^+ \cup \mathcal{O}_{t_j}^-) \neq \emptyset$ なので,

$$W^s(\mathcal{O}_{t_j}^-, \tilde{F}_{t_j}) \cap W^u(\mathcal{O}_{t_j}^+, \tilde{F}_{t_j}) \neq \emptyset$$

は直ぐ分かる．これと (3.7) と命題 3.8-(ii) を合わせることで, \tilde{F}_{t_j} は $\mathcal{O}_{t_j}^+$ と $\mathcal{O}_{t_j}^-$ に関する余指数が 1 のヘテロ次元サイクルを持つことが分かる．これで定理 1.1 の証明が完了した. \square

4 ホモクリニック接触から Hopf 分岐の構成

この節では, 定理 1.4 を証明する．具体的には, 第 4.1 節でモデルに要請する仮定を述べ, その次の節から最後の節にかけて証明を行う．

4.1 モデルに要請する仮定

この節では, ホモクリニック接触を持つ微分同相写像のモデルに要請する条件について述べる．

M を 3 次元多様体とし, M 上の C^r ($r \geq 5$) 微分同相写像 φ であって, 固有値 λ_i ($i = 1, 2, 3$) (但し, $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2 < \lambda_3$) が対応する双曲型不動点 p を持ち, p に同伴するホモクリニック接触 q が存在するものを考える．閉条件 $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ を仮定する．さらに, 原点 $\mathbf{0}$ の近傍を動く変数 $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ をパラメータとする M 上の (通有的でない) C^r 微分同相写像の族 $\{\varphi_\mu\}_\mu$ (パラメータに関しては少なくとも C^0 であるとする) が存在して, $\varphi_0 = \varphi$ と次の (i)–(iii) をみたすことを仮定する:

(i) 双曲型不動点 p の延長を p_μ で書くとき, $D\varphi_\mu(p_\mu)$ の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ について

- λ_1 と λ_3 は μ には依存せず,
- λ_2 は μ_2 には依存しないが, μ_1 に関して C^0 で依存し (従って, 以下 $\lambda_2 = \lambda_2(\mu_1)$ と書く),
- $\mu_1 = \lambda_1 \lambda_2(\mu_1) - 1$

をみたす.

- (ii) $p_\mu = (0, 0, 0)$ となる, μ に関して C^0 で依存する, ある C^5 線形化座標 (x, y, z) (即ち, この座標を用いて $\varphi_\mu(x, y, z) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y, \lambda_3 z)$ と表示される) と, ある定数 N と, ある $b' > 0$ が存在して, 十分小さい任意の μ に対して, 写像 φ_μ^N による

$$\Pi_{yz} := [-b', b'] \times [1 - b', 1 + b']^2$$

の像は再び (x, y, z) -空間内に入り, 特に, 大域写像 φ_μ^N は Π_{yz} 上で

$$\varphi_\mu^N : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ax + \beta y \\ \alpha x + \gamma y^2 \\ \delta z \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

とかける (図 4.1 を見よ). ここで, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は零でない定数である. (縦ベクトルと横ベクトルを自然に同一視して, 見やすさに応じて勝手に入れ替えることがある). 従って, $\mu = 0$ のときホモクリニック接触

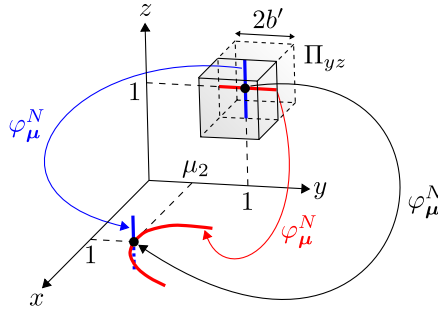


図 4.1: 大域写像 φ_μ^N (赤い線分は $\{x=0, z=1\}$ の一部で赤い放物線にうつり, 青い線分は $\{x=0, y=1\}$ の一部で青い直線にうつる)

$(1, 0, 0)$ が存在するが, $(1, 0, 0)$ の軌道が元々のホモクリニック接触 q を含むことも仮定する.

- (iii) (ii) で与えられる定数について, 次を仮定する:

$$a \neq 0, \quad (4.2)$$

$$\alpha\beta < 0 \quad (4.3)$$

(定数に上のような条件がついている理由は, (4.2) については注意 4.8, (4.3) については注意 4.4 を参照せよ).

4.2 Hopf 点となる周期点の存在

第 4.1 節で与えられたモデル $\{\varphi_\mu\}_\mu$ は, 十分大きい任意の自然数 n と, 十分小さい任意の μ に対して, $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ の近く存在する直方体 $B_n(\mu_1)$

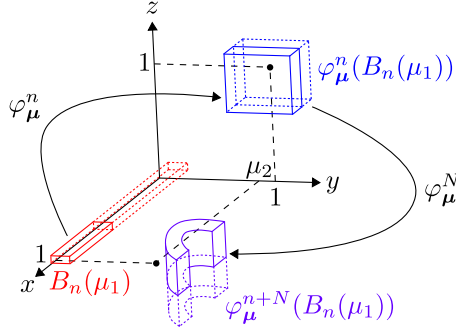


図 4.2: 回帰写像 φ_{μ}^{n+N}

を定義域に含む回帰写像 φ_{μ}^{n+N} を持つ．図 4.2 を見よ．この節で行うことを分かり易いように項目化して説明する：

- 初めに，前述のような $B_n(\mu_1)$ の存在を示す（補題 4.1）．
- 次に， $0 \rightarrow \infty$ へ収束する任意の点列 $\{\nu_n\}_n \subset (0, \infty)$ と，十分大きい任意の n と，十分小さい任意の μ_1 に対して，適切なパラメータ $\mu_2 = \mu_2^{(n)}(\mu_1)$ を選ぶことで， φ_{n, μ_1}^{n+N} は将来的に Hopf 点となる不動点 $P_n^-(\mu_1)$ を持つことを示す（補題 4.2）．ここで，

$$\varphi_{n, \mu_1} := \varphi_{(\mu_1, \mu_2^{(n)}(\mu_1))}$$

とおいた． $P_n^-(\mu_1)$ は列 $\{\nu_n\}_n$ に依存することに注意せよ．

- 最後に，任意の $\psi \in (0, \pi)$ と，十分大きい任意の n に対して，適切な数列 $\{\nu_n\}_n$ と，適切なパラメータ $\mu_1 = \mu_1^{(n)}$ をえらぶことで，上で得た周期点 $P_n^- := P_n^-(\mu_1^{(n)})$ におけるヤコビ行列 $D\varphi_n^{n+N}(P_n^-)$ は，偏角が $\pm\psi$ である大きさ 1 の 2 つの複素固有値を持つことを示す（補題 4.3）．ここで，

$$\varphi_n := \varphi_{(\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}(\mu_1))}$$

とおいた．偏角が自由に設定できる理由は $\{\nu_n\}_n$ を適切に選ぶからである．

まず初めに，回帰写像の定義域に含まれる直方体 $B_n(\mu_1)$ の存在を示す．

補題 4.1. $\{\varphi_{\mu}\}_{\mu}$ を第 4.1 節で与えられたモデルとし， b' と Π_{yz} をそれぞれ図 4.1 にある正の定数と直方体とする．このとき，ある $b > 0$ が存在して，十分大きい任意の n と，十分小さい任意の μ に対して， (x, y, z) -空間内の， μ_1 に関して C^0 で依存する直方体

$$\begin{aligned} B_n(\mu_1) = & [1 - b, 1 + b] \times [\lambda_2^{-n}(1 - b'), \lambda_2^{-n}(1 + b')] \\ & \times [\lambda_3^{-n}(1 - b'), \lambda_3^{-n}(1 + b')] \end{aligned} \quad (4.4)$$

の φ_{μ}^{n+N} による像は、再び、 (x, y, z) -空間内に含まれる．特に、 $B_n(\mu_1)$ 上で φ_{μ}^{n+N} は

$$\varphi_{\mu}^{n+N} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 + a\lambda_1^n x + \beta(\lambda_2^n y - 1) \\ \mu_2 + \alpha\lambda_1^n x + \gamma(\lambda_2^n y - 1)^2 \\ \delta(\lambda_3^n z - 1) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

とかける．

証明. 定数 $b > 0$ を小さく勝手に一つとり、十分大きい各 n と十分小さい各 μ に対して、直方体 $B_n(\mu_1)$ を (4.4) で定める．すると、十分大きい任意の n と、十分小さい任意の μ に対して

$$\varphi_{\mu}^n(B_n(\mu_1)) = [\lambda_1^n(1-b), \lambda_1^n(1+b)] \times [1-b', 1+b']^2 \subset \Pi_{yz}$$

となるので、 $B_n(\mu_1)$ の φ_{μ}^{n+N} による像は、再び、 (x, y, z) -空間内に含まれることになる．特に、各 $(x, y, z) \in B_n(\mu_1)$ は φ_{μ}^n によって

$$(\lambda_1^n x, \lambda_2^n y, \lambda_3^n z)$$

にうつった後、大域写像の表示 (4.1) より、次に φ_{μ}^N によって

$$\begin{pmatrix} 1 + a\lambda_1^n x + \beta(\lambda_2^n y - 1) \\ \mu_2 + \alpha\lambda_1^n x + \gamma(\lambda_2^n y - 1)^2 \\ \delta(\lambda_3^n z - 1) \end{pmatrix}$$

にうつる．これで補題の証明が完了した． \square

次に、 0 へ収束する任意の点列 $\{\nu_n\}_n \subset (0, \infty)$ と、十分大きい任意の n と十分小さい任意の μ_1 に対して、適切なパラメータ $\mu_2 = \mu_2^{(n)}(\mu_1)$ を選ぶことで、 φ_{n, μ_1}^{n+N} は将来的に Hopf 点となる不動点を持つことを示す．

補題 4.2. 次を仮定する：

- $\{\varphi_{\mu}\}_{\mu}$ を第 4.1 節で与えられたモデル、
- $B_n(\mu_1)$ を補題 4.1 で与えられる立方体とし、
- $\{\nu_n\}_n \subset (0, \infty)$ を $\lim_n \nu_n = 0$ となる勝手な点列とする．

このとき、十分大きい任意の n と十分小さい任意の μ_1 で定義された C^0 級のある関数列 $\{\mu_2^{(n)}(\mu_1)\}_n$ が存在して、 $\{\mu_2^{(n)}(\mu_1)\}_n$ は 0 に一様収束、即ち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\mu_1} \mu_2^{(n)}(\mu_1) = 0$$

をみだし、かつ十分小さい任意の μ_1 に対して、回帰写像 φ_{n,μ_1}^{n+N} は、不動点 $P_n^-(\mu_1) = (x_-, y_-, z_-) \in B_n(\mu_1)$ であって、

$$x_- = \frac{2\gamma - (\alpha\beta^2 + 2a\gamma)\lambda_1^n + \beta\lambda_2^{-n} - a\beta\lambda_1^n\lambda_2^{-n} - \sqrt{\nu_n}}{2\gamma(1 - a\lambda_1^n)^2}, \quad (4.6)$$

$$y_- = \{\beta^{-1}(1 - a\lambda_1^n)x_- - \beta^{-1} + 1\} \lambda_2^{-n}, \quad (4.7)$$

$$z_- = \frac{\delta}{\delta\lambda_3^n - 1} \quad (4.8)$$

とかけるものを持つ。

証明. 実際に関数列 $\{\mu_2^{(n)}(\mu_1)\}_n$ を構成し、主張を証明する。

$(x, y, z) \in B_n(\mu_1)$ に関する方程式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \varphi_{\mu}^{n+N}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 + a\lambda_1^n x + \beta(\lambda_2^n y - 1) \\ \mu_2 + \alpha\lambda_1^n x + \gamma(\lambda_2^n y - 1)^2 \\ \delta(\lambda_3^n z - 1) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

を解く作業を行う。ここで、二番目の等式は (4.5) から従う。第一式と第二式を合わせて y を消去すると、

$$\begin{aligned} & \gamma(1 - 2a\lambda_1^n + a^2\lambda_1^{2n})x^2 \\ & + \{-2\gamma + (\alpha\beta^2 + 2a\gamma)\lambda_1^n - \beta\lambda_2^{-n} + a\beta\lambda_1^n\lambda_2^{-n}\}x \\ & + \beta^2\mu_2 + \gamma + \beta(1 - \beta)\lambda_2^{-n} = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

という x に関する二次方程式が得られる。この二次方程式の判別式は、

$$\text{判別式} = -4\beta^2\gamma\{1 + O(\lambda_1^n)\}\mu_2 + O(\lambda_1^n) + O(\lambda_2^{-n}) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (4.11)$$

と計算できる。第 4.1 節でモデルに要請していた仮定 (i), (ii) を思い出すと、(4.11) の項 $O(\lambda_1^n)$ や $O(\lambda_2^{-n})$ などは μ_2 には依存せず、 μ_1 に関しては C^0 で依存する。従って、十分大きい任意の n と十分小さい任意の μ_1 に対して、パラメータ $\mu_2 = \mu_2^{(n)}(\mu_1)$ を、判別式が補題の仮定で与えた $\nu_n > 0$ になるように、即ち (4.11) の項を用いて

$$\mu_2^{(n)}(\mu_1) = \frac{\nu_n - O(\lambda_1^n) - O(\lambda_2^{-n})}{-4\beta^2\gamma\{1 + O(\lambda_1^n)\}}$$

と選ぶと、関数 $\mu_2^{(n)}(\mu_1)$ は C^0 級である。特に、十分小さい任意の μ_1 に対して $\mu_2^{(n)}(\mu_1)$ を定義しておけば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\mu_1} \mu_2^{(n)}(\mu_1) = 0$$

となっている。 $\mu_2 = \mu_2^{(n)}(\mu_1)$ として二次方程式 (4.10) を解けば、2 つの解 x_+, x_- は

$$x_{\pm} = \frac{-\{-2\gamma + (\alpha\beta^2 + 2a\gamma)\lambda_1^n - \beta\lambda_2^{-n} + a\beta\lambda_1^n\lambda_2^{-n}\} \pm \sqrt{\nu_n}}{2\gamma(1 - a\lambda_1^n)^2},$$

とかける．よって

$$\begin{aligned} x_- &= \frac{2\gamma - (\alpha\beta^2 + 2a\gamma)\lambda_1^n + \beta\lambda_2^{-n} - a\beta\lambda_1^n\lambda_2^{-n} - \sqrt{\nu_n}}{2\gamma(1 - a\lambda_1^n)^2} \\ &= 1 + O(\lambda_1^n) + O(\lambda_2^{-n}) + O(\sqrt{\nu_n}) \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

とかけることが分かり，これで (4.6) が導かれた． x_- に対応する方程式 (4.9) の解を y_- , z_- とおけば，方程式を解くことで，それぞれは (4.7), (4.8) とかけることも直ぐに分かる．特に，

$$\begin{aligned} y &= \lambda_2^{-n} \{1 + O(\lambda_1^n) + O(\lambda_2^{-n}) + O(\sqrt{\nu_n})\}, \\ z &= \lambda_3^{-n} \{1 + O(\lambda_3^{-n})\} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

とかけている．上の式と $B_n(\mu_1)$ の式 (4.4) より，十分大きい任意の n について $(x_-, y_-, z_-) \in B_n(\mu_1)$ となっている．つまり， (x_-, y_-, z_-) は実際に (4.9) の解になっている．以上で証明が完了した． \square

次に，適切なパラメータ $\mu_1 = \mu_1^{(n)}$ を選ぶことで，十分大きい任意の n に対して，ヤコビ行列 $D\varphi_n^{n+N}(P_n^-)$ は，偏角が自由に設定できる，大きさ 1 の 2 つの複素固有値を持つことを示す．

補題 4.3. 次を仮定する：

- $\{\varphi_\mu\}_\mu$ を第 4.1 節で与えられたモデルとし，
- $\psi \in (0, \pi)$ を勝手な数とする．

このとき，ある数列 $\{\nu_n\}_n \subset (0, \infty)$ と，十分大きい任意の n で定義されたある数列 $\{\mu_1^{(n)}\}_n$ が存在して，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_1^{(n)} = 0$$

かつ， $\{\nu_n\}_n$ から定まる補題 4.2 の関数列と φ_{n, μ_1}^{n+N} の不動点をそれぞれ $\{\mu_2^{(n)}(\mu_1)\}_n$ と $P_n^-(\mu_1)$ とおけば，十分大きい任意の n に対して，ヤコビ行列

$$D\varphi_n^{n+N}(P_n^-)$$

は大きさ 1 の 2 つの複素固有値 $e^{\pm i\psi}$ と，大きさ 1 超過の 1 つの固有値 $\delta\lambda_3^n$ を持つ．ここで，

$$P_n^- := P_n^-(\mu_1^{(n)})$$

とおいた．

証明. まず $\{\nu_n\}_n \subset (0, \infty)$ を $\lim_n \nu_n = 0$ となる勝手な列として， $\{\mu_1^{(n)}\}_n$ を適切に構成する． $P_n^-(\mu_1)$ を原点とする新しい座標 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ を

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (x, y, z) - P_n^-(\mu_1)$$

で定める． φ_{n,μ_1}^{n+N} をこの座標を用いて表示すると，(4.5) より，

$$\varphi_{n,\mu_1}^{n+N} : \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a\lambda_1^n \tilde{x} + \beta\lambda_2^n \tilde{y} \\ \alpha\lambda_1^n \tilde{x} + 2\gamma\lambda_2^n (\lambda_2^n y_- - 1)\tilde{y} + \gamma\lambda_2^{2n} \tilde{y}^2 \\ \delta\lambda_3^n \tilde{z} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

とかける．これより，

$$D\varphi_{n,\mu_1}^{n+N}(P_n(\mu_1)) = \begin{pmatrix} a\lambda_1^n & \beta\lambda_2^n & 0 \\ \alpha\lambda_1^n & 2\gamma\lambda_2^n (\lambda_2^n y_- - 1) & 0 \\ 0 & 0 & \delta\lambda_3^n \end{pmatrix}$$

となる．故に $D\varphi_{n,\mu_1}^{n+N}(P_n(\mu_1))$ の固有方程式は

$$\begin{aligned} & (X - \delta\lambda_3^n) \\ & \cdot [X^2 - \{a\lambda_1^n + 2\gamma\lambda_2^n (\lambda_2^n y_- - 1)\}X + 2a\gamma\lambda_1^n \lambda_2^n (\lambda_2^n y_- - 1) - \alpha\beta\lambda_1^n \lambda_2^n] \\ & = 0 \end{aligned}$$

で与えられるので， $D\varphi_{n,\mu_1}^{n+N}(P_n(\mu_1))$ は $\delta\lambda_3^n$ を固有値に持つことが直ぐに分かる． $\delta\lambda_3^n$ 以外の残りの固有値を σ_1, σ_2 とおくと，上の固有方程式は

$$(X - \delta\lambda_3^n)(X - \sigma_1)(X - \sigma_2) = 0$$

とも書けるので，係数比較より，

$$\sigma_1\sigma_2 = 2a\gamma\lambda_1^n \lambda_2^n (\lambda_2^n y_- - 1) - \alpha\beta\lambda_1^n \lambda_2^n$$

となっている． $\sigma_1\sigma_2$ を計算するために先に $\lambda_2^n y_- - 1$ を計算しておくと，(4.6), (4.7) より

$$\lambda_2^n y_- - 1 = \beta^{-1} \frac{2\gamma - (\alpha\beta^2 + 2a\gamma)\lambda_1^n + \beta\lambda_2^{-n} - a\beta\lambda_1^n \lambda_2^{-n} - \sqrt{\nu_n}}{2\gamma(1 - a\lambda_1^n)} - \beta^{-1}$$

となる．故に

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2 &= \frac{a\lambda_1^n \lambda_2^n}{1 - a\lambda_1^n} \{2\gamma(1 - a\lambda_1^n)(\lambda_2^n y_- - 1) - a^{-1}(1 - a\lambda_1^n)\alpha\beta\} \\ &= \frac{a\lambda_1^n \lambda_2^n}{1 - a\lambda_1^n} \{2\beta^{-1}\gamma - (a\beta + 2a\beta^{-1}\gamma)\lambda_1^n + \lambda_2^{-n} - a\lambda_1^n \lambda_2^{-n} \\ &\quad - \beta^{-1}\sqrt{\nu_n} - 2\beta^{-1}\gamma(1 - a\lambda_1^n) - a^{-1}(1 - a\lambda_1^n)\alpha\beta\} \\ &= \frac{a\lambda_1^n \lambda_2^n}{1 - a\lambda_1^n} \{(1 - a\lambda_1^n)\lambda_2^{-n} - \beta^{-1}\sqrt{\nu_n} - a^{-1}\alpha\beta\} \\ &= a\lambda_1^n - \frac{\lambda_1^n \lambda_2^n}{1 - a\lambda_1^n} (\alpha\beta + a\beta^{-1}\sqrt{\nu_n}) \\ &= a\lambda_1^n - \frac{(1 + \mu_1)^n}{1 - a\lambda_1^n} (\alpha\beta + a\beta^{-1}\sqrt{\nu_n}) \end{aligned}$$

と計算できる．ここで，最後の変形では第 4.1 節で要請していた仮定 (i) を用いた．いま， $\{\mu_1^{(n)}\}_n$ を上の式が 1 になるように，即ち，

$$\mu_1^{(n)} := \left\{ \frac{-(1 - a\lambda_1^n)^2}{\alpha\beta + a\beta^{-1}\sqrt{\nu_n}} \right\}^{\frac{1}{n}} - 1$$

で定める．ここで，モデルに要請していた仮定 $\alpha\beta < 0$ ((4.3) を参照せよ) を思い出すと，十分大きい任意の n に対して， $\frac{-(1 - a\lambda_1^n)^2}{\alpha\beta + a\beta^{-1}\sqrt{\nu_n}}$ は正の数なので， $\mu_1^{(n)}$ は well-defined である． $\{\mu_1^{(n)}\}_n$ の定義より，

$$\lim_n \mu_1^{(n)} = 0 \quad (4.13)$$

は直ぐに分かる．

次に，補題の仮定で与えられた $\psi \in (0, \pi)$ に対し， $\{\nu_n\}_n$ を適切に選べば， σ_1 と σ_2 は偏角が $\pm\psi$ で大きさ 1 の複素数であることを確認する．上の $\sigma_1\sigma_2$ の計算より，

$$2a\gamma\lambda_1^n\lambda_2^n(\lambda_2^n y_- - 1) - \alpha\beta\lambda_1^n\lambda_2^n = a\lambda_1^n - \frac{\alpha\beta\lambda_1^n\lambda_2^n}{1 - a\lambda_1^n} - \frac{a\beta^{-1}\lambda_1^n\lambda_2^n}{1 - a\lambda_1^n}\sqrt{\nu_n}$$

が従うので，これより，

$$2\gamma\lambda_2^n(\lambda_2^n y_- - 1) = 1 - \frac{\alpha\beta\lambda_1^n\lambda_2^n}{1 - a\lambda_1^n} - \frac{\beta^{-1}\lambda_2^n}{1 - a\lambda_1^n}\sqrt{\nu_n}$$

が分かる．故に，上で与えられていた固有方程式の X に関する 2 次式の部分の X の係数は

$$- \left(a\lambda_1^n + 1 - \frac{\alpha\beta\lambda_1^n\lambda_2^n}{1 - a\lambda_1^n} - \frac{\beta^{-1}\lambda_2^n}{1 - a\lambda_1^n}\sqrt{\nu_n} \right)$$

となるが，ここで，

$$a\lambda_1^n - \frac{\alpha\beta\lambda_1^n\lambda_2^n}{1 - a\lambda_1^n} = 1 + \frac{a\beta^{-1}\lambda_1^n\lambda_2^n}{1 - a\lambda_1^n}\sqrt{\nu_n}$$

となるように $\mu_1 = \mu_1^{(n)}$ を選んでいたことに注意すると， X の係数はさらに

$$\begin{aligned} & - \left(1 - \frac{\beta^{-1}\lambda_2^n}{1 - a\lambda_1^n}\sqrt{\nu_n} + 1 + \frac{a\beta^{-1}\lambda_1^n\lambda_2^n}{1 - a\lambda_1^n}\sqrt{\nu_n} \right) \\ & = - (2 - \beta^{-1}\lambda_2^n\sqrt{\nu_n}) \end{aligned}$$

と計算できる．以上より，上の固有方程式の X に関する 2 次式の部分の判別式は

$$\text{判別式} = (2 - \beta^{-1}\lambda_2^n\sqrt{\nu_n})^2 - 4$$

と計算できる． $2 - \beta^{-1}\lambda_2^n\sqrt{\nu_n} = 2\cos\psi$ となるように，即ち

$$\nu_n = 4\beta^2(1 - \cos\psi)^2\lambda_2^{-2n} \quad (> 0)$$

と選んでおけば， $\lim_n \nu_n = 0$ をみたし，十分大きい任意の n に対して，上の判別式は負となる．これで， σ_1 と σ_2 は互いに共役な複素数であることが分かった．特に， $\{\mu_1^{(n)}\}_n$ の構成方法から， σ_1 と σ_2 は大きさ 1 である．さらに， $\{\nu_n\}_n$ の構成方法から， σ_1 と σ_2 の偏角は ψ であることが分かる．以上で証明が完了した． \square

注意 4.4. 上の証明を見ればわかる通り， $\alpha\beta > 0$ である場合は，固有値をどのように制御しても，点 P_n におけるヤコビ行列は，共役な複素固有値をもたない．実際，十分大きい任意の n に対して， $\sigma_1\sigma_2 < 0$ であるからである．逆に言うと， P_n におけるヤコビ行列が大きさ 1 の共役な複素固有値を持つようにするために，我々は $\alpha\beta < 0$ を仮定した．

注意 4.5. 上の証明の $\sigma_1\sigma_2$ の計算より，元の微分同相写像 φ の固有値が $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$ となる場合では，どのように固有値を制御しても，点 P_n におけるヤコビ行列は大きさ 1 の複素固有値を持つことはない．このような理由から，我々は $\lambda_1\lambda_2 = 1$ ということを仮定した．

最後にこの節で得られたことをまとめる．

系 4.6. $\{\varphi_\mu\}_\mu$ を第 4.1 節で与えられたモデルとし， $\psi \in (0, \pi)$ を任意の数とする．このとき， $\mathbf{0}$ に収束するあるパラメータ列 $\{\mu_n\}_n$ が存在して， $\varphi_n := \varphi_{\mu_n}$ は周期 $n + N$ の周期点 P_n^- を持ち， P_n^- における固有値は $\delta\lambda_3^n, e^{\pm i\psi}$ である．

4.3 Lyapunov 値の計算

系 4.6 の ψ を，任意の $k = 1, 2, 3, 4, 5$ に対して $e^{i\psi}$ が 1 の k 乗根でないように選んでおく．Hopf 点の定義（定義 3.1）より，周期点 P_n^- が Hopf 点であることを示すには，十分大きい任意の n に対して，点 P_n^- が局所中心多様体上で吸引的か反発的かを定める (3.2) の A にあたる定数が 0 でないことを確認する必要がある．ここではこの定数 A を **Lyapunov 値** と呼ぶことにする．この節では P_n^- の Lyapunov 値を実際に計算し，定理 1.4 を証明する．

φ_n^{n+N} は (4.12) と表示されていたので， φ_n^{n+N} は $B_n \cap \{\tilde{z} = 0\}$ という面を $\{\tilde{z} = 0\}$ という面に保ち，この上で

$$\varphi_n^{n+N} : \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a\lambda_1^n\tilde{x} + \beta\lambda_2^n\tilde{y} \\ \alpha\lambda_1^n\tilde{x} + 2\gamma\lambda_2^n(\lambda_2^n y_- - 1)\tilde{y} + \gamma\lambda_2^{2n}\tilde{y}^2 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

とかける．そこで見やすさのため，各係数を定数としてしまった \mathbb{R}^2 上の写像

$$H : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y \\ \gamma x + \delta y + \epsilon y^2 \end{pmatrix}$$

であって,

$$\alpha + \delta = 2 \cos \psi, \quad \alpha \delta - \beta \gamma = 1, \quad \alpha, \beta, \gamma, \epsilon \neq 0$$

をみたすものを考える. 勿論, 元の写像に倣って $\psi \in (0, \pi)$ は $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ に依らないものとする. このとき, 不動点 $\mathbf{0}$ におけるヤコビ行列の固有値は $e^{\pm i\psi}$ であり, 我々は不動点 $\mathbf{0}$ における Lyapunov 値を計算することにする. 上の記号において, $x, y, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ などの記号は以前に登場したので使わないほうが良いのだが, 次の補題内のみで上の記号は用いられ, 混乱が起きないと思われるので, このように書くことにする.

補題 4.7. $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を上で与えられる写像とする. このとき, 不動点 $\mathbf{0}$ における Lyapunov 値は

$$2(\cos \psi + 1)\alpha + O(\alpha^2) \quad (\alpha \rightarrow 0)$$

と計算できる.

証明. 証明を見やすくするため, 2つのステップに分けて証明する.

ステップ 1. このステップでは, 適切な座標 (u, v) であって, $z = u + iv$, $\bar{z} = u - iv$ と定めると, H が

$$H(z, \bar{z}) = \lambda z + \sum_{k=2}^4 \sum_{p+q=k} \xi_{pq} z^p \bar{z}^q + O(|z|^5) \quad (4.15)$$

とかけるようなものを定める. ここで, $\lambda = e^{i\psi}$ である. さらに, 各係数 ξ_{pq} も具体的に求める.

天下一的に座標 (u, v) を与えてしまう: 座標 (u, v) を $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で定める. ここで,

$$P = -\frac{4 \sin^2 \psi}{\gamma \epsilon} \begin{pmatrix} 1 & (\alpha - \cos \psi) / \sin \psi \\ 0 & \gamma / \sin \psi \end{pmatrix}$$

であり, この P は, 行列 $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ に対して $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$ となるように選んである. さて, (u, v) で H を表示しよう. 与えられた (u, v) に対して,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -\frac{4 \sin^2 \psi}{\gamma \epsilon} \begin{pmatrix} 1 & (\alpha - \cos \psi) / \sin \psi \\ 0 & \gamma / \sin \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

で (x, y) を定め, これを H で送ると, $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon y^2 \end{pmatrix}$ となる. この点を

(u, v) 座標に引き戻して,

$$\begin{aligned}
& P^{-1}A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon y^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\
&\quad - \frac{\gamma \epsilon}{4 \sin^2 \psi} \cdot \frac{\sin \psi}{\gamma} \begin{pmatrix} \gamma / \sin \psi & -(\alpha - \cos \psi) / \sin \psi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \sin^2 \psi v^2 / \epsilon \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4(\alpha - \cos \psi)v^2 \\ -4 \sin \psi v^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる．これがまさしく H の座標 (u, v) に関する表示である．次に, $z = u + iv$, $\bar{z} = u - iv$ と定め, (z, \bar{z}) で H を表示する．逆変換

$$u = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad v = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

より,

$$\begin{aligned}
H(z, \bar{z}) &= \lambda z + (\lambda - \alpha)(z - \bar{z})^2 \\
&= \lambda z + \xi z^2 - 2\xi z\bar{z} + \xi \bar{z}^2 \quad (\xi := \lambda - \alpha)
\end{aligned}$$

とかける．

ステップ 2. このステップでは, 実際に Lyapunov 値を求める．(4.15) のようにかける座標 (u, v) に対して, Lyapunov 値は

$$\operatorname{Re} \left[\bar{\lambda} \xi_{21} + \frac{2\bar{\lambda} |\xi_{02}|^2}{\lambda^2 - \bar{\lambda}} + \frac{\bar{\lambda} |\xi_{11}|^2}{1 - \bar{\lambda}} + \frac{\xi_{11} \xi_{20} \bar{\lambda} (1 - 2\lambda)}{\lambda^2 - \lambda} \right]$$

で与えられる (例えば, [I, Chapter III] を見よ)．この公式を用いて計算しよう．

0 における Lyapunov 値 L は, $\alpha \rightarrow 0$ のとき

$$\begin{aligned}
L &= 2|\xi|^2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\lambda^3 - 1} \right] + 4|\xi|^2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\lambda - 1} \right] - 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\xi^2 \bar{\lambda}^2 (1 - 2\lambda)}{\lambda - 1} \right] \\
&= 2|\xi|^2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\lambda^3 - 1} \right] + 4|\xi|^2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\lambda - 1} \right] \\
&\quad - 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1 - 2\lambda}{\lambda - 1} \right] + 4\alpha \operatorname{Re} \left[\frac{\bar{\lambda} (1 - 2\lambda)}{\lambda - 1} \right] + O(\alpha^2) \\
&= 2|\xi|^2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\lambda^3 - 1} \right] + 4|\xi|^2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\lambda - 1} \right] \\
&\quad - 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1 - 2\lambda}{\lambda - 1} \right] + 4\alpha \left(\operatorname{Re} \left[\frac{\bar{\lambda}}{\lambda - 1} \right] - 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\lambda - 1} \right] \right) + O(\alpha^2)
\end{aligned}$$

と計算できるが、ここで、複素関数 $w = \frac{1}{z-1}$ について、 $|z| = 1$ ならば $\operatorname{Re}[w] \equiv -\frac{1}{2}$ であることと、 $\frac{1-2\lambda}{\lambda-1} = -2 - \frac{1}{\lambda-1}$ であることから、

$$\begin{aligned} L &= -3|\xi|^2 + 3 + 4\alpha \left(\operatorname{Re} \left[\frac{\bar{\lambda}}{\lambda-1} \right] + 1 \right) + O(\alpha^2) \\ &= -3(\alpha^2 - 2\cos\psi \cdot \alpha + 1) + 3 + 4\alpha \left(\operatorname{Re} \left[\frac{\bar{\lambda}}{\lambda-1} \right] + 1 \right) + O(\alpha^2) \\ &= \left(6\cos\psi + 4\operatorname{Re} \left[\frac{\bar{\lambda}}{\lambda-1} \right] + 4 \right) \alpha + O(\alpha^2) \quad (\alpha \rightarrow 0) \end{aligned}$$

となる。いま、直接的な計算で

$$\operatorname{Re} \left[\frac{\bar{\lambda}}{\lambda-1} \right] = -\frac{2\cos\psi + 1}{2}$$

であることが確かめられるから、

$$\begin{aligned} L &= \{6\cos\psi - 2(2\cos\psi + 1) + 4\}\alpha + O(\alpha^2) \\ &= 2(1 + \cos\psi)\alpha + O(\alpha^2) \quad (\alpha \rightarrow 0) \end{aligned}$$

である。以上で証明が完了した。 \square

今までの議論から定理 1.4 は直ぐに分かる。

定理 1.4 の証明. 系 4.6 の φ_n は (4.14) と表示されていたので、任意の $k = 1, 2, 3, 4, 5$ に対して $e^{i\psi}$ が 1 の k 乗根でないように ψ を選んでおけば補題 4.7 より、 P_n^- における Lyapunov 値は

$$2a(\cos\psi + 1)\lambda_1^n + O(\lambda_1^{2n}) \quad (n \rightarrow \infty)$$

である。モデルに要請していた仮定 $a \neq 0$ ((4.2) を参照せよ) を思い出せば、上の値は 0 にならず P_n^- は Hopf 点である。これで、 φ の C^r でいくらかでも近いところに、Hopf 点 P_n^- を持つ微分同相写像 φ_n が存在することが示された。特に、 $a > 0$ ならば P_n^- は局所中心多様体上で吸引的であり、 $a < 0$ ならば反発的である。 \square

注意 4.8. 上の証明より、 P_n^- が Hopf 点であることを保証するために、 $a \neq 0$ という仮定をモデルに要請した。(4.2) を参照せよ。

謝辞

本論文は筆者が首都大学東京大学院理工学研究科数理情報科学専攻博士前期課程に在学中の研究成果をまとめたものである。同専攻教授相馬輝彦先生

には指導教官として本研究の実施にあたって終始ご指導を頂いた。ここに感謝の意を表す。東海大学理学部数学科教授桐木紳先生には、本論文の第3節の研究にあたって終始ご指導を頂いた。ここに感謝の意を表す。同専攻准教授高津飛鳥先生、並びに、同専攻准教授深谷友宏先生には副査としてご助言を頂くとともに本論文のご指導を頂いた。ここに感謝の意を表す。

参考文献

- [BD] C. BONATTI and L. J. DÍAZ, Robust heterodimensional cycles and C^1 -generic dynamics, *Journal of the Inst. of Math. Jussieu* **7** (2008), no. 3, 469–525.
- [BDV] C. BONATTI, L. J. DÍAZ and M. VIANA, *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity*, Berlin: Springer, 2005.
- [B] P. BRUNOVSKY, On one parameter families of diffeomorphisms, *Comment. Math. Univ. Carolinae* **11** (1970), 559–582.
- [HPS] M. HIRSCH, C. PUGH and M. SHUB, *Invariant Manifolds (Lecture Notes in Maths vol 583)*, Berlin: Springer, 1976.
- [I] G. IOOS, *Bifurcation of Maps and Applications (North-Holland Mathematics Studies, 36)*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1979.
- [MM] J. MARSDEN and M. MCCracken, *The Hopf Bifurcation and its Applications*, Berlin: Springer, 1976.
- [M] J. C. MARTÍN, Hopf bifurcations and homoclinic tangencies, *Nonlinearity* **12** (1999), no. 4, 893–902.
- [R] C. ROBINSON, *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos, 2nd ed. (Studies in Advanced Mathematics)*, CRC Press, 1976.
- [RT] D. RUELLE and F. TAKENS, On the nature of turbulence, *Commun. Math. Phys.* **20** (1971), 167–192.